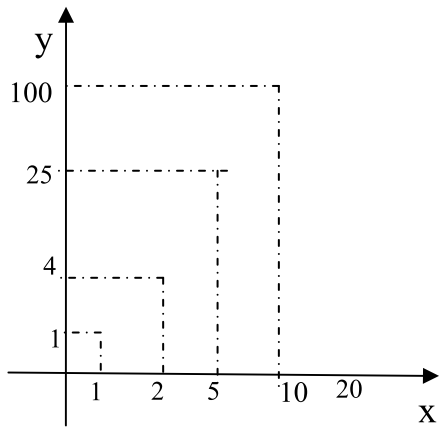
Fonksiyon Kavramı

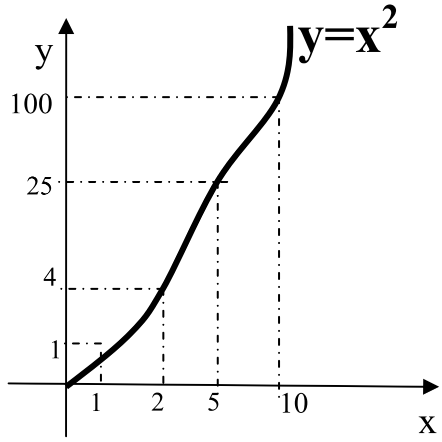
Bir fonksiyon kısaca bir terimin başka bir terime bağlı olarak değişmesidir. Örnek olarak

$y=f(x)=x^2$,

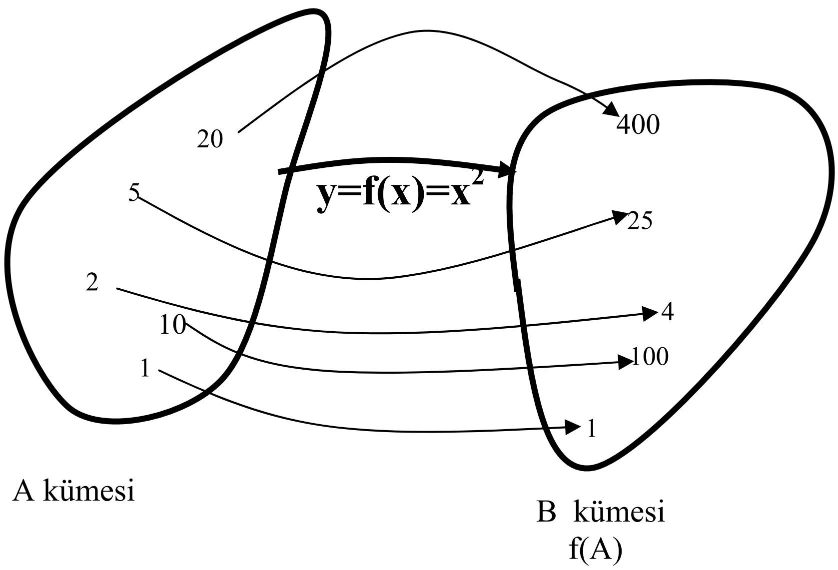
ifadesini alalım. Bu ifade de y terimi, x in karesi olacak şekilde değer alır.

x	0	1	2	5	10	20	50
y=f(x)	0	1	4	25	100	400	2500





Pratikte fonksiyon konusu küme (set) kavramları ile açıklanır.



f(x) fonksiyonu A kümesindeki elemanları B kümesine dönüştürür. B kümesine görüntü kümesi denilir.

Fonksiyonlarla ilgili tanımlar.

Tanım Bölgesi: Fonksiyonun tanımlı olması için x'in alabileceği değerlerdir.

or71) $f(x)=x+1$, fonksiyonu x in bütün değerleri için tanımlıdır.
Tanım aralığı $-\infty<x<\infty$ olarak gösterilir.

Or73) $f(x)=x^2$, fonksiyonu x in bütün değerleri için tanımlıdır.

Tanım aralığı $-\infty<x<\infty$ olarak gösterilir.

Or75) f(x)=$\sqrt{x}$ fonksiyonu x in pozitif değerleri için tanımlıdır. Reel sayılarda $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$,vb tanımsızdır.

Tanım aralığı $0<x<\infty$ olarak gösterilir.

Or77) f(x)=$\sqrt{x+2}$ fonksiyonu $x \geq -2$ için tanımlıdır.

Tanım aralığı $-2 \leq x <\infty$ olarak gösterilir.

Or79) f(x)=$\sqrt{1-x}$ fonksiyonu $x \leq 1$ için tanımlıdır.

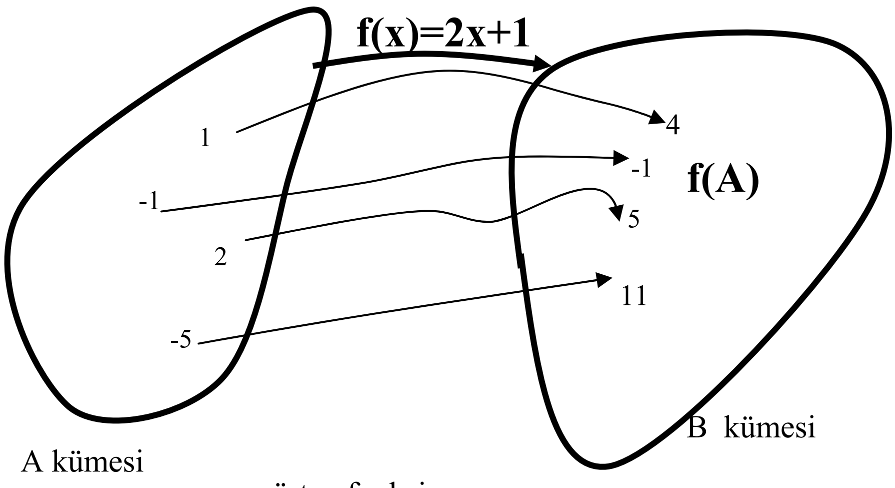
Tanım aralığı $-\infty \leq x <1$ olarak gösterilir.

Or81) f(x)=$\dfrac{1}{x-1}$ fonksiyonu x=1 hariç her yerde tanımlıdır.

Or81) f(x)=$\dfrac{1}{(x-1)(x+5)}$ fonksiyonu x=-5 ve x=1 hariç her yerde tanımlıdır.

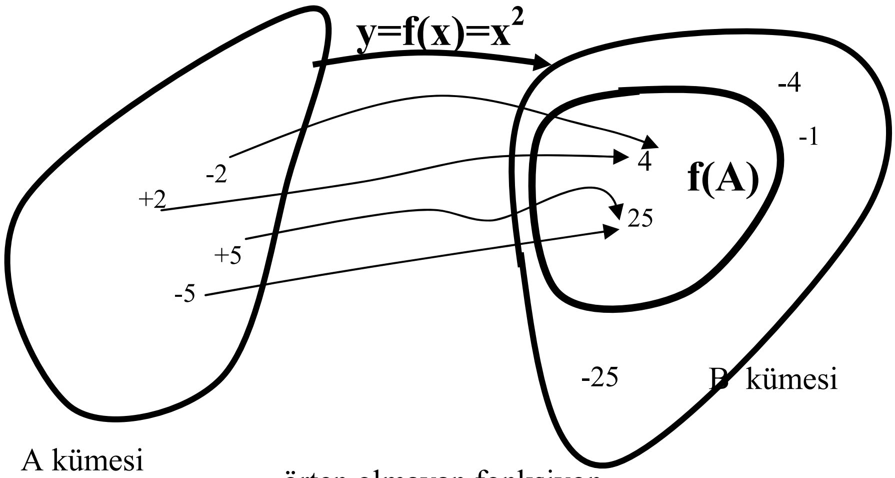
Örten Fonksiyon. B kümesinin her elemanı A kümesinin bir elemanına karşı geliyorsa örten fonksiyon denir.

Or43) f(x)=2x+1 örten fonksiyondur. B deki her elemanın karşılığı A da vardır.



örten fonksiyon

Or45) f(x)=x^2 örten fonksiyon değildir. B deki her elemanın karşılığı A da yoktur. Mesela B kümesindeki -4 un karşılığı A da yoktur. $x^2=-1$ şartını sağlayan x değeri reel sayılar kümesinde yoktur. $x^2=-1$ şartını sağlayan kompleks sayılar konumuzun dışındadır. Biz A ve B kümelerinin tamamen reel sayılardan meydana geldiğini varsayıyoruz.



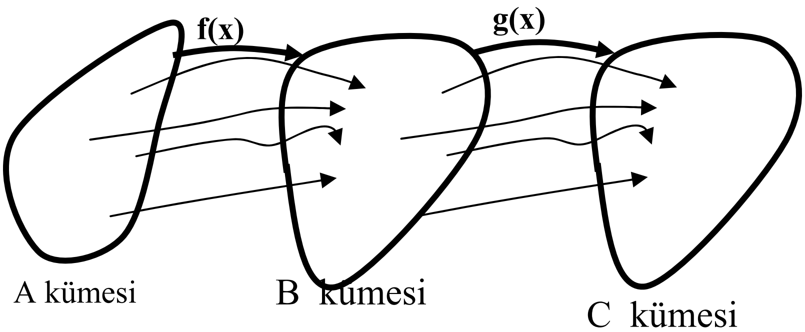
örten olmayan fonksiyon

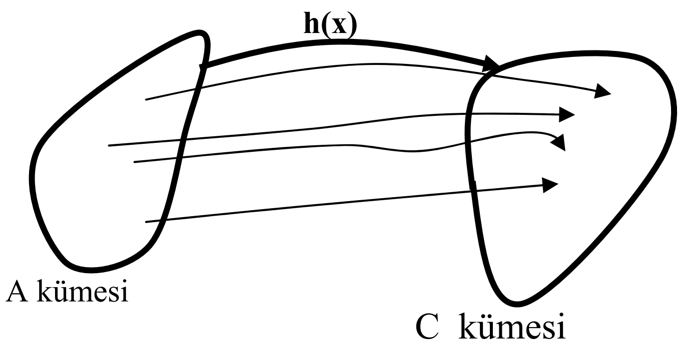
Birebir Fonksiyon. A kümesinin farklı elemanlarının B kümesindeki karşılığı da farklı ise birebir fonksiyon denir.

Or47) $f(x)=2x+1$ birebir fonksiyondur. A daki farklı her elemanın karşılığı B de farklıdır.

Or49) $f(x)=x^2$ birebir fonksiyon değildir. A daki -2 ve +2 nin B deki karşılığı 4 dur. B deki 4 elemanının A daki karşılığı 2 tanedir, tek değildir.

Bileşke Fonksiyon. gof(x),fog(x): f(x) fonksiyonu A kümesindeki elemanları B kümesine dönüştürüşün. g(x) fonksiyonu B kümesindeki elemanları C kümesine dönüştürüşün. A daki elemanları C ye dönüştüren $h(x)=g(f(x))$ fonksiyonuna gof bileşke fonksiyonu denir.





Or47) $f(x)=2x+1$, $g(x)=x^2$ ise $h(x)=gof(x)$ fonksiyonunu bulun.
Çözüm: $h(x)=g(f(x))=(2x+1)^2=4x^2+4x+1$

Or49) $f(x)=x^2$, $g(x)=2x+1$, ise $h(x)=gof(x)$ fonksiyonunu bulun.
Çözüm: $h(x)=g(f(x))=2x^2+1$

Bir Fonksiyonun Tersi.
f(x) ve g(x) fonksiyonları için fog(x)=x, ve gof(x)=x şartları sağlanıyorsa f(x) in tersi g(x), g(x) in tersi f(x) fonksiyonudur.
y=f(x) fonksiyonunu tersini bulmak için, x yerine y, y yerine x konulur. cebrik işlemlerle y yalnız bırakılır. elde edilen yeni y=g(x) fonksiyonu f(x) in ters fonksiyonudur. f(x) fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x)$seklinde gösterilir.

Or47) $f(x)=2x+1$, fonksiyonunun tersini bulun.
Çözüm: $y=f(x)=2x+1$
$x=2y+1 \rightarrow 2y+1=x \rightarrow 2y=x-1, \rightarrow y=(x-1)/2=f^{-1}(x)$

Or53) $f(x)=2x+1$, $h(x)=(x-1)/2$ ise gof(x), ve fog(x) fonksiyonlarını bulun.
Çözüm: gof(x)=?

$$gof(x) \rightarrow \frac{x-1}{2} \rightarrow \frac{(2x+1)-1}{2} \rightarrow \frac{2x}{2} \rightarrow x$$

$$fog(x) \rightarrow 2x+1 \rightarrow 2\frac{x-1}{2}+1 \rightarrow x-1+1 \rightarrow x$$

Or55) $f(x)=8x-9$, fonksiyonunun tersini bulun.
Çözüm: $y=f(x)=8x-9$
$x=8y-9 \rightarrow 8y-9=x \rightarrow 8y=x+9, \rightarrow y=(x+9)/8=f^{-1}(x)$

Or47) $f(x)=x^2$, fonksiyonunun tersini bulun.
Çözüm: $y=f(x)=x^2$
$x=y^2 \rightarrow y^2=x \rightarrow y=\sqrt{x}=f^{-1}(x)$
Not: $\sqrt{x}$ fonksiyonu $x>0$ için tanımlıdır. Fonksiyonun tersi de sadece bu aralıkta tanımlıdır.

INVERSE FUNCTIONS. Two functions f and g such that $g(f(x)) = x$ and $f(g(y)) = y$ are said to be *inverse* functions. Inverse functions reverse the effect of each other.

EXAMPLE 1: (*a*) The inverse of $f(x) = x + 1$ is the function $g(y) = y - 1$.
(*b*) The inverse of $f(x) = -x$ is the same function.
(*c*) The inverse of $f(x) = \sqrt{x}$ is the function $g(y) = y^2$ (defined for $y \geq 0$).
(*d*) The inverse of $f(x) = 2x - 1$ is the function $g(y) = \frac{y+1}{2}$.

Not every function has an inverse function. For example, the function $f(x) = x^2$ does not possess an inverse. Since $f(1) = f(-1) = 1$, an inverse function g would have to satisfy $g(1) = 1$ and $g(1) = -1$, which is impossible. However, if we restrict the function $f(x) = x^2$ to the domain $x \geq 0$, then the function $g(y) = \sqrt{y}$ would be an inverse of f. The condition that a function f must satisfy to have an inverse is that f is *one-to-one*; that is, for any x_1 and x_2 in the domain of f, if $x_1 \neq x_2$, then $f(x_1) \neq f(x_2)$.

79

Notation: The inverse of f is denoted f^{-1}. If $y = f(x)$, we often write $x = f^{-1}(y)$. If f is differentiable, we write, as usual, dy/dx for the derivative $f'(x)$, and dx/dy for the derivative $(f^{-1})'(y)$.

If a function f has an inverse and we are given a formula for $f(x)$, then to find a formula for the inverse f^{-1}, we solve the equation $y = f(x)$ for x in terms of y. For example, given $f(x) = 5x + 2$, set $y = 5x + 2$. Then, $x = \frac{y-2}{5}$, and a formula for the inverse function is $f^{-1}(y) = \frac{y-2}{5}$.

DIFFERENTIATION FORMULA for finding dy/dx given dx/dy:

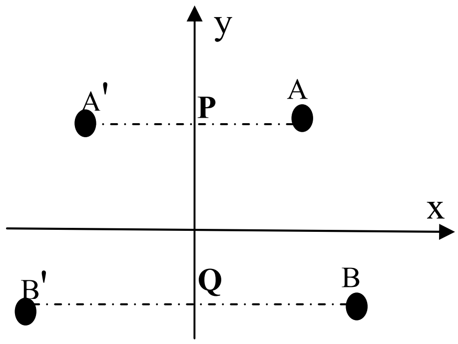
12. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{dx/dy}$

EXAMPLE 2: Find dy/dx, given $x = \sqrt{y} + 5$.
First method: Solve for $y = (x-5)^2$. Then $dy/dx = 2(x-5)$.

Second method: Differentiate to find $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} y^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$. Then, by rule 12, $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} = 2(x-5)$.

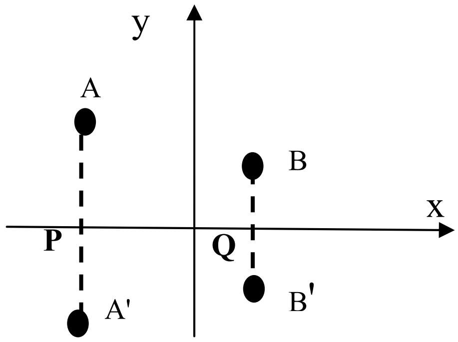
(See Problems 14, 15, and 57 to 62.)

Tek ve Çift Fonksiyon.
Simetri Kavramı:
y eksenine göre simetri:



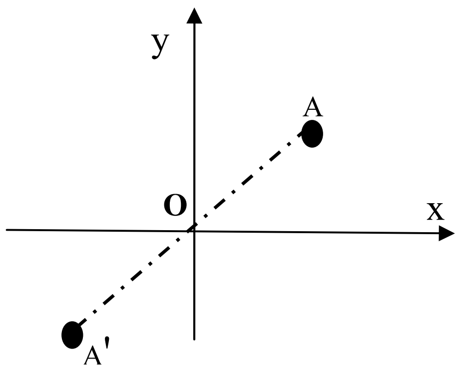
Şekildeki A ve A' noktaları y eksenine göre simetriktir. PA ve PA' uzunlukları eşittir.
Şekildeki B ve B' noktaları y eksenine göre simetriktir. QB ve QB' uzunlukları eşittir.

x eksenine göre simetri:

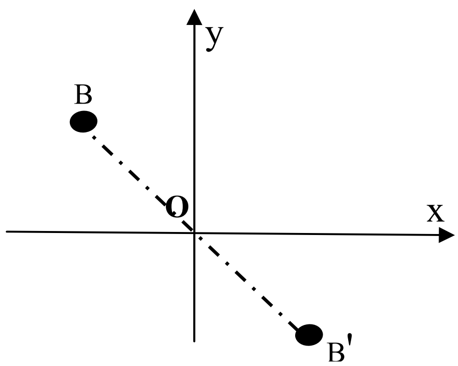


Şekildeki A ve A' noktaları x eksenine göre simetriktir. PA ve PA' uzunlukları eşittir.
Şekildeki B ve B' noktaları x eksenine göre simetriktir. QB ve QB' uzunlukları eşittir.

Orijine göre simetri:

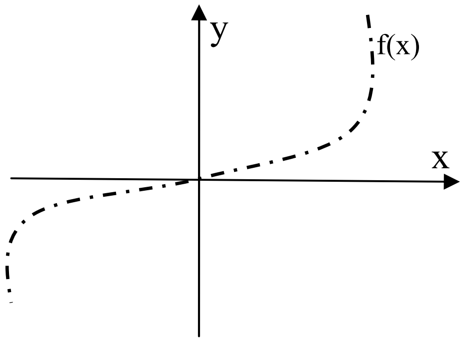


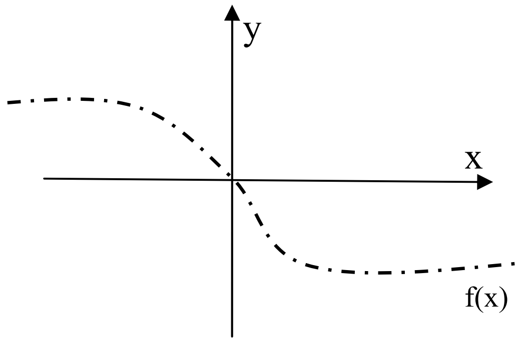
Şekildeki A ve A' noktaları orijine göre simetriktir. OA ve OA' uzunlukları eşittir.



Şekildeki B ve B' noktaları orijine simetriktir. OB ve OB' uzunlukları eşittir.

Tek fonksiyon: Bir fonksiyon orijine göre simetrik ise o fonksiyon tek fonksiyondur. Aşağıda grafiği verilen fonksiyonlar tek fonksiyondur.





Tek fonksiyonlarda f(-x)=-f(x)şartı sağlanır.

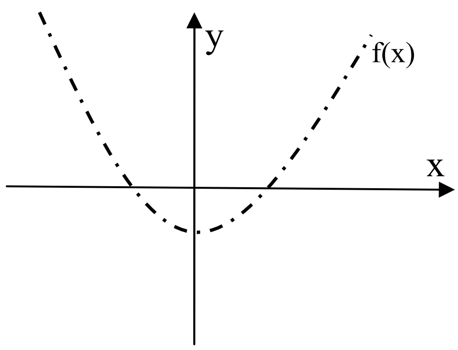
Or231) f(x)=3x, fonksiyonu tek fonksiyondur. çünkü
f(-x)=3(-x)=-3x
-f(x)=-(3x)=-3x
f(-x)=-f(x) olduğundan fonksiyon tek fonksiyondur.

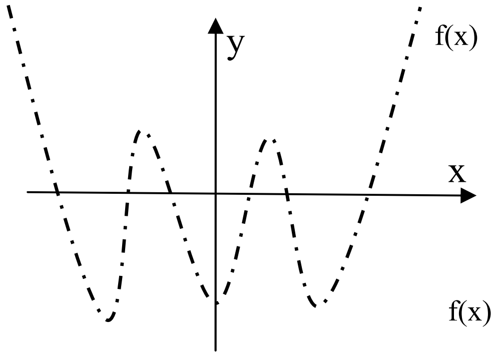
Or233) f(x)=3x+2, fonksiyonu tek fonksiyonmudur.
Çözüm:
f(-x)=3(-x)+2 = -3x+2
-f(x)=-(3x+2)=-3x-2
f(-x) = -f(x) olmadığı için fonksiyon tek fonksiyon değildir.

Or235) $f(x)=x^2$, fonksiyonu tek fonksiyonmudur.
Çözüm:
$f(-x)=(-x)^2 = x^2$
$-f(x)=-(x^2)= - x^2$
f(-x) = -f(x) olmadığı için fonksiyon tek fonksiyon değildir.

Or236) $f(x)=x^3$, fonksiyonu tek fonksiyonmudur.
Çözüm:
$f(-x)=(-x)^3 =- x^3$
$-f(x)=-(x^3)= - x^3$
f(-x) = -f(x) olduğu için fonksiyon tek fonksiyondur.

Çift fonksiyon: Bir fonksiyon y eksenine göre simetrik ise o fonksiyon çift fonksiyondur. Aşağıda grafiği verilen fonksiyonlar çift fonksiyondur.





Çift fonksiyonlarda f(-x)=f(x)şartı sağlanır.

Or241) $f(x)=x^2+10$ fonksiyonu çift fonksiyonmudur.
Çözüm:
$f(-x)=(-x)^2+10=x^2+10$
f(-x) = f(x) olduğu için fonksiyon çift fonksiyondur.

Or243) f(x)=3x+2, fonksiyonu çift fonksiyonmudur.
Çözüm:
$f(-x)=3(-x)+2=-3x+2$
f(-x) = f(x) olmadığı için fonksiyon çift fonksiyon değildir.

Bir fonksiyon tek yada çift olmak zorunda değildir.
f(x)=x+1, tek yada çift fonksiyon şartını sağlamaz. Ne tek, ne de çift fonksiyondur.

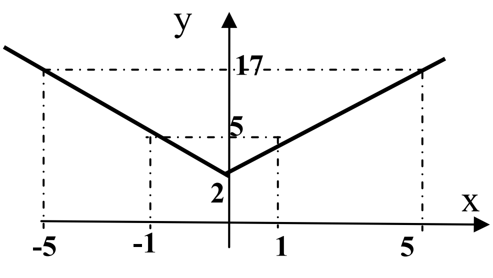
Pratikte Kullanılan Fonksiyonların grafikleri

Mutlak değer fonksiyonları, A)y=f(|x|), B)y=|f(x)|, C)y=|f(|x|)|

A)y=f(|x|) fonksiyonunun grafiği. x in negatif değerleri yerine pozitif değerleri konularak grafik çizilir. Pratik olarak şöyle bir yol izleriz. x in pozitif değerleri için grafik çizilir. grafiğin y eksenine göre simetriği alınır.

Or251) y=f(x)=3|x|+2, fonksiyonunun grafiğini çizin.
Çözüm:
y=f(|x|)=3|x|+2

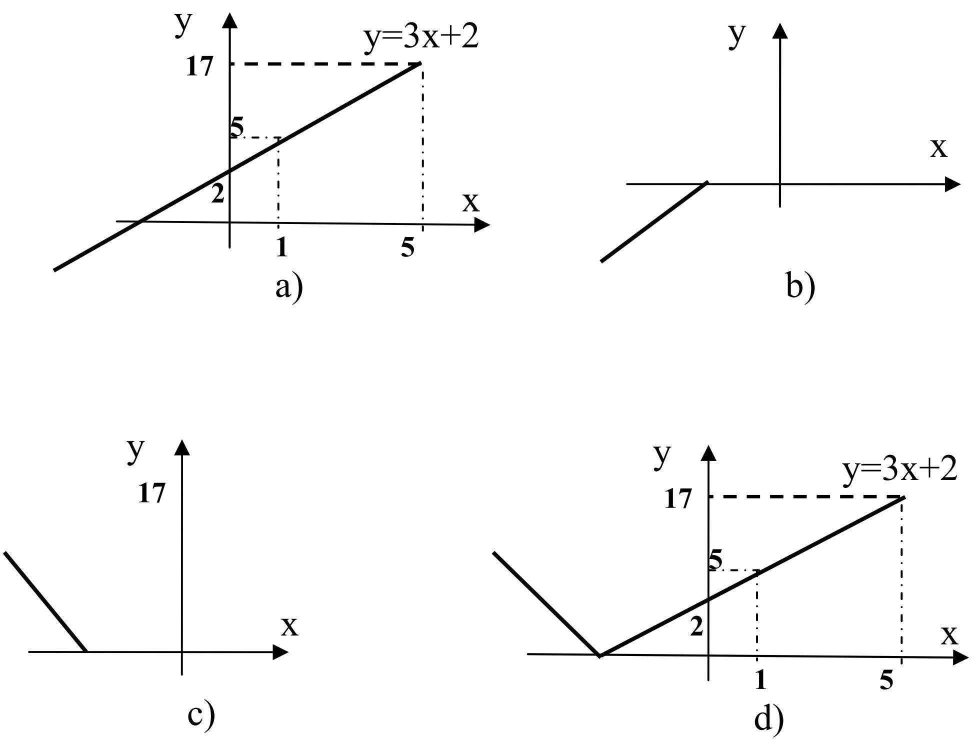
x	-5	-1	0	1	5
|x|	5	1	0	1	5
y=f(x)=3|x|+2	17	5	2	5	17



B) y=|f(x)| grafiği f(x) in negatif değerleri yerine pozitif değerleri konularak grafik çizilir. Pratik olarak şöyle bir yol izleriz. f(x) in grafik çizilir. grafiğin x ekseninin altında kalan kısmi x eksenine göre simetriği alınır.

Or253) y=|f(x)|=|3x+2|, fonksiyonunun grafiğini çizin.
Çözüm:
y=f(|x|)=3|x|+2

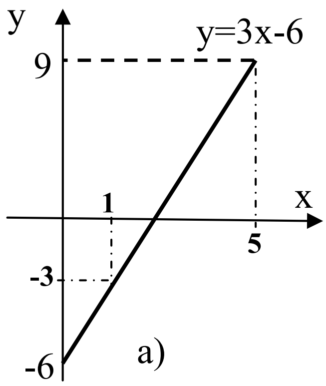
x	-5	-1	0	1	5
y=f(x)=3x+2	-13	-1	2	5	17
y=|f(x)|=|3x+2|	13	1	2	5	17

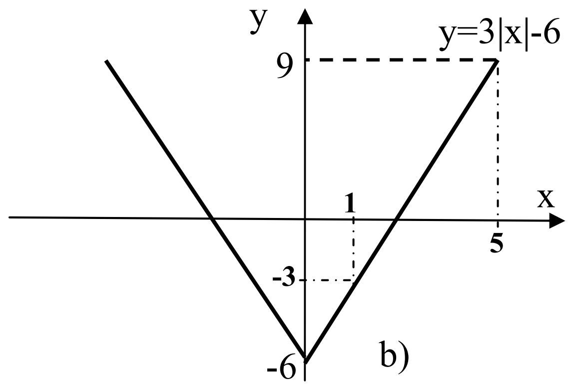


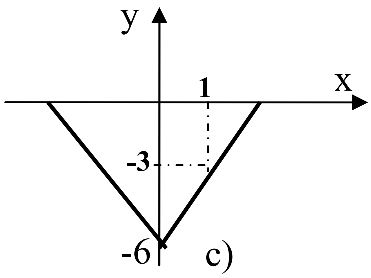
a) y=f(x)=3x+2 nin grafiği. b)f(x) in negatif kısmi. c)f(x) in negatif kısmının x eksenine göre simetriği. d)y=|f(x)|=|3x+2| nin grafiği.

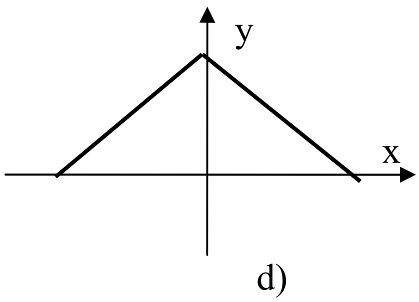
C) y=|f(|x|)| grafiği. 1)x in negatif değerleri yerine pozitif değerleri konularak grafik çizilir. 2)Elde edilen grafiğin y eksenine göre simetriği alınır. 3)yeni grafikte, f(|x|) in negatif kısımlarının x eksenine göre simetrisi alınır.

Or255) y=|f(|x|)|=|3|x|-6|, fonksiyonunun grafiğini çizin.
Çözüm:

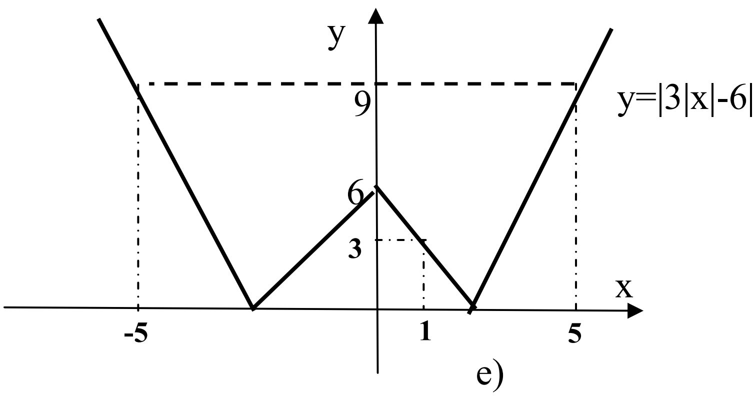








a)x in sadece pozitif değerleri alınarak çizilen y=3x-6, nin grafiği. b)a daki grafiğin y eksenine göre simetriği grafiğe eklenmiş. c)b deki grafiğin y=f(x)<0 kısmi. d)f(x)<0 kısmının x eksenine göre simetriğinin grafiği.



e)y=|f(|x|)|=|3|x|-6| nin grafiği.

Simdi de tablo değerleri kullanarak grafiği çizelim.

x	-5	-1	0	1	5
|x|	5	1	0	1	5
y=f(|x|)=3|x|-6	9	-3	-6	-3	9
y=|f(|x|)|=|3|x|-6|	9	3	6	3	9

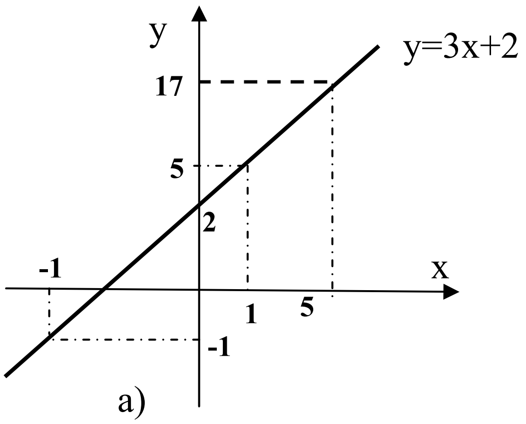
Yukaridaki işlemleri yapmadan tablodaki değerleri kullanarak grafiği çizersek. e) de verilen grafiği elde ederiz.

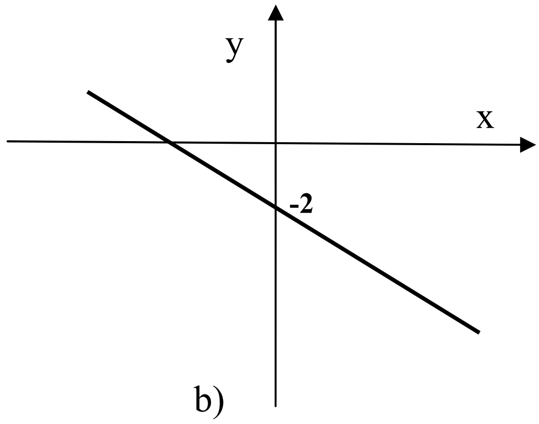
y=-f(x) fonksiyonunun grafiği

y=f(x) ve y=-f(x) x eksenine göre simetriktir. y=f(x) fonksiyonunun x eksenine göre simetriği alınırsa y=-f(x) fonksiyonunun grafiği elde edilir.

Or261) y=f(x)=3x+2, olduğuna göre y=f(x) ve y=-f(x) fonksiyonlarının grafiklerini çizin.
Çözüm:
y=f(x)=3x+2,

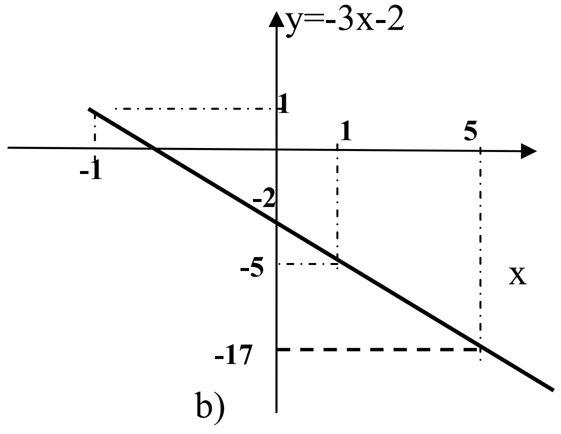
x	-5	-1	0	1	5
y=f(x)=3x+2	-13	-1	2	5	17



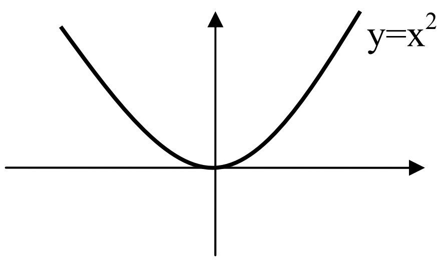


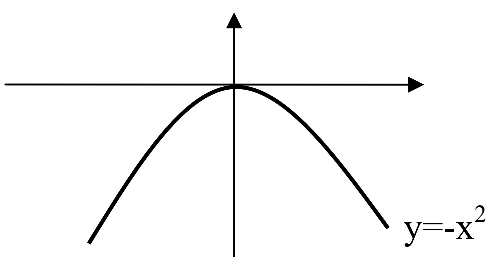
a) y=f(x)=3x+2 nin grafiği. b)f(x) in x eksenine göre simetriği
Simdi **y=-**f(x)=-(3x+2)=-3x-2 nin grafiğini tablo değerleri kullanarak çizelim.

x	-5	-1	0	1	5
y=f(x)=-3x-2	13	2	-2	-5	-17



Or262) y=f(x)=x^2, olduğuna göre y=f(x) ve y=-f(x) fonksiyonlarının grafiklerini çizin.
Çözüm:



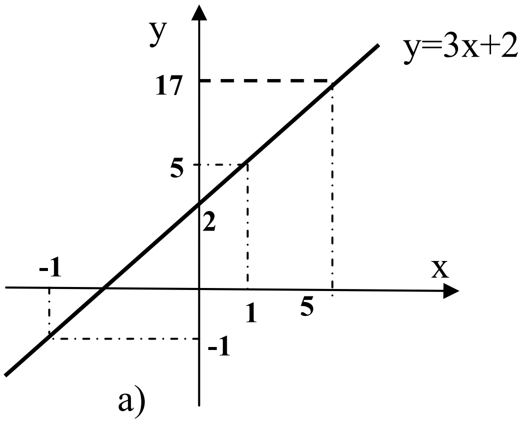


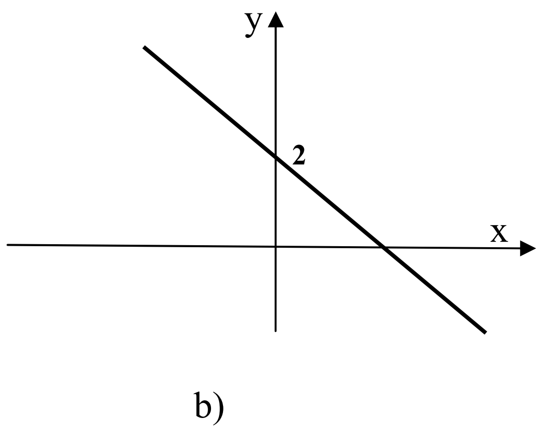
y=f(-x) fonksiyonunun grafiği

y=f(x) ve y=f(-x) y eksenine göre simetriktir. y=f(x) fonksiyonunun y eksenine göre simetriği alınırsa y=f(-x) fonksiyonunun grafiği elde edilir.

Or271) y=f(x)=3x+2, olduğuna göre y=f(x) ve y=f(-x) fonksiyonlarının grafiklerini çizin.
Çözüm:
y=f(x)=3x+2,

x	-5	-1	0	1	5
y=f(x)=3x+2	-13	-1	2	5	17





a) y=f(x)=3x+2 nin grafiği. b)f(x) in y eksenine göre simetriği
Simdi **y=**f(-x)=3(-x)+2=-3x+2 nin grafiğini tablo değerleri kullanarak çizelim.

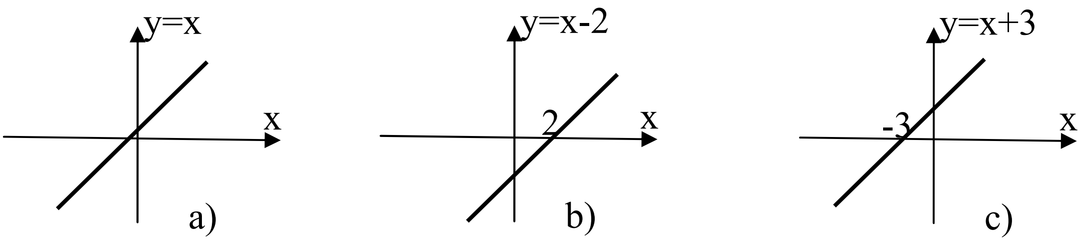
x	-5	-1	0	1	5
y=f(x)=-3x+2	17	5	-2	-1	-13

Bu değerler kullanılarak grafiği çizersek b) deki grafiği elde ederiz.

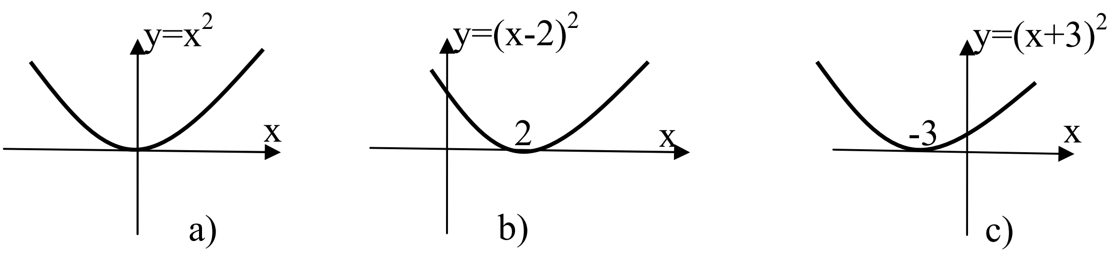
y=f(x+a) ve y=f(x-a) fonksiyonunun grafiği

y=f(x-a) y=f(x) grafiğinin a kadar sağa kaymış halidir.
y=f(x+b) y=f(x) grafiğinin b kadar sola kaymış halidir.

Or281) y=f(x)=x, olduğuna göre y=f(x-2) ve y=f(x+3) fonksiyonlarının grafiklerini çizin.
Çözüm:



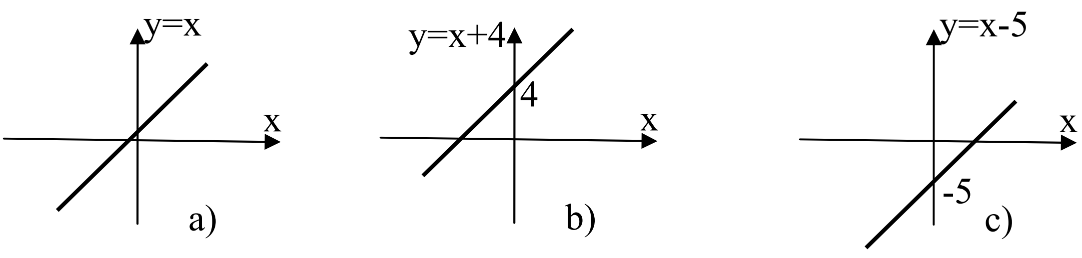
Or283) y=f(x)=x^2, olduğuna göre y=f(x-2) ve y=f(x+3) fonksiyonlarının grafiklerini çizin.
Çözüm:



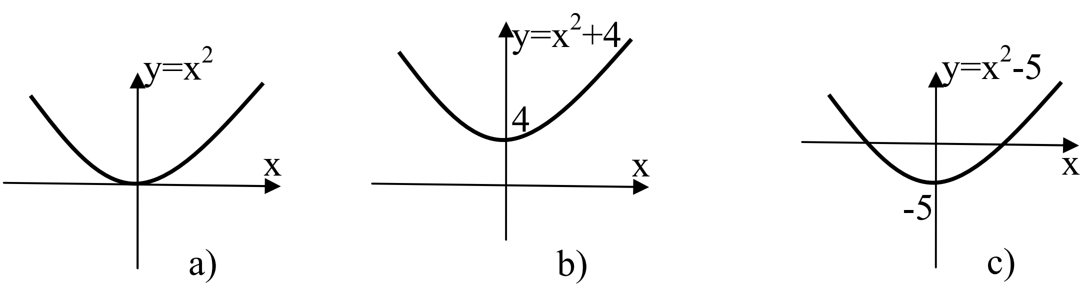
y=f(x)+a ve y=f(x)-a fonksiyonunun grafiği

y=f(x)+B y=f(x) grafiğinin B kadar yukarı kaymış halidir.
y=f(x)-A y=f(x) grafiğinin A kadar aşağı kaymış halidir.

Or291) y=f(x)=x, olduğuna göre y=f(x)+4 ve y=f(x)-5 fonksiyonlarının grafiklerini çizin.
Çözüm:

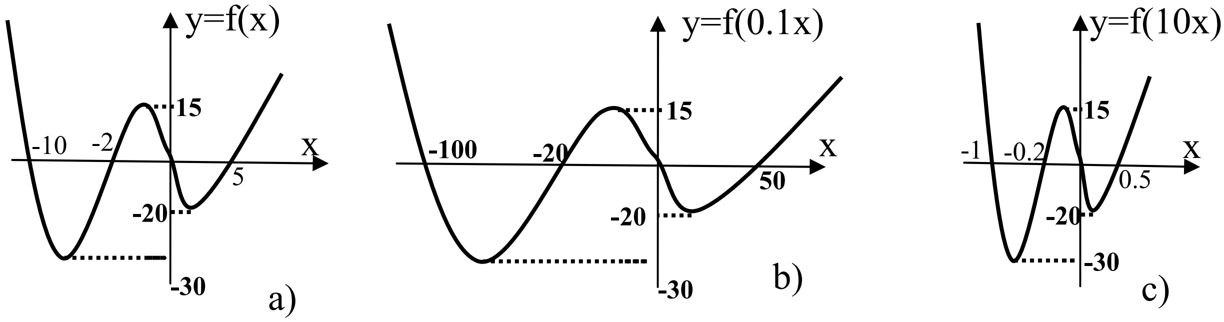


Or283) y=f(x)=x^2, olduğuna göre y=f(x)+4 ve y=f(x)-5 fonksiyonlarının grafiklerini çizin.
Çözüm:

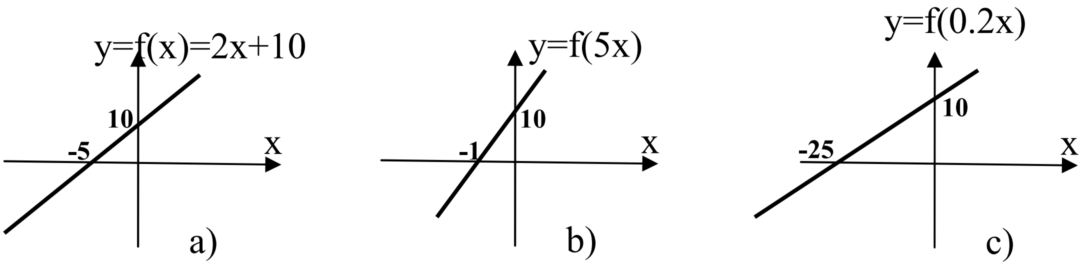


y=f(ax) fonksiyonunun grafiği

y=f(ax) fonksiyonunun grafiği, y=f(x) fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre açılmış yada büzülmüş halidir. Aşağıdaki grafikte bu durum açıklanmıştır.



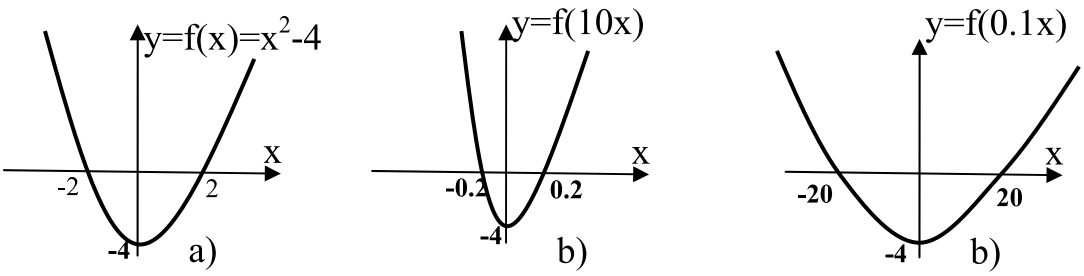
Or305) y=f(x)=2x+10, olduğuna göre y=f(5x) ve y=f(0.2x) fonksiyonlarının grafiklerini çizin.
Çözüm: f(5x), f(x) fonksiyonunun x eksenine göre 5 kat büzülmüş halidir.
f(0.2x), f(x) fonksiyonunun x eksenine göre 5 kat genişlemiş halidir. Grafikte görülüyor.



y=f(x)=2x+10 fonksiyonunda x→5x koyarsak, y=f(5x)=2(5x)+10=10x+10 elde ederiz. Tablo yapıp çizersek b) deki grafiği elde ederiz.

y=f(x)=2x+10 fonksiyonunda x→0.2x koyarsak,y=f(0.2x)=2(0.2x)+10=0.4x+10
elde ederiz. Tablo yapıp çizersek c) deki grafiği elde ederiz.

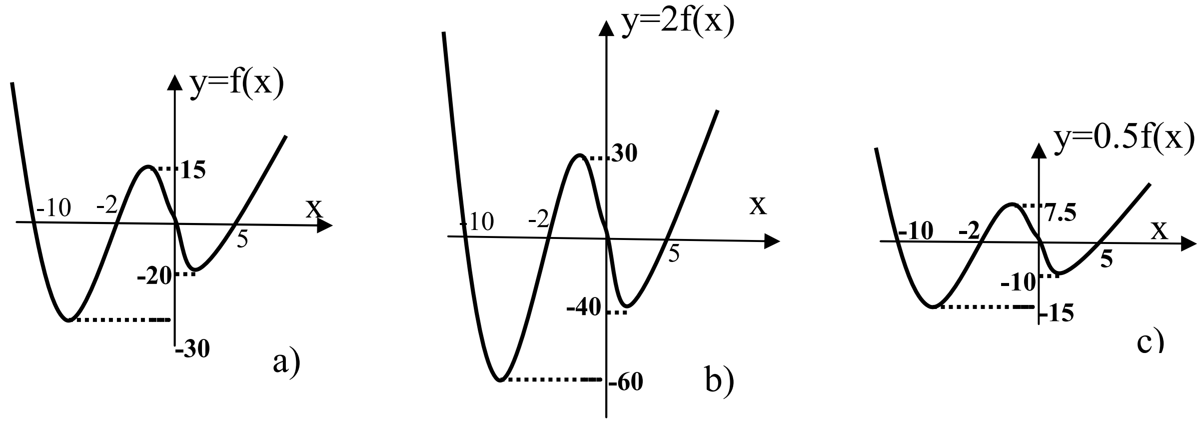
Or307) y=f(x)=x^2-4 olduğuna göre y=f(10x) ve y=f(0.1x) fonksiyonlarının grafiklerini çizin.
Çözüm:



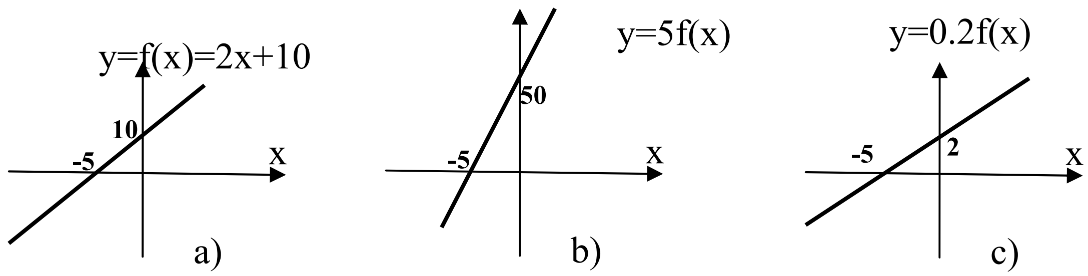
Çözüm: f(10x), f(x) fonksiyonunun x eksenine göre 10 kat büzülmüş halidir.
f(0.1x), f(x) fonksiyonunun x eksenine göre 10 kat genişlemiş halidir. Grafikte görülüyor.

y=af(x) fonksiyonunun grafiği

y=af(x) fonksiyonunun grafiği, y=f(x) fonksiyonunun grafiğinin y eksenine göre açılmış yada büzülmüş halidir.



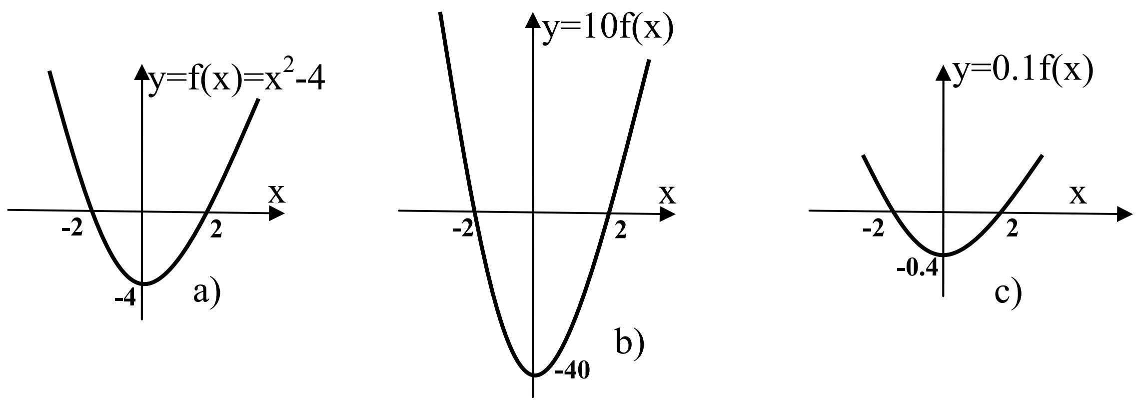
Or313) y=f(x)=2x+10, olduğuna göre y=5f(x) ve y=0.2f(x) fonksiyonlarının grafiklerini çizin.
Çözüm: 5f(x), f(x) fonksiyonunun y eksenine göre 5 kat genişlemiş halidir.
0.2f(x), f(x) fonksiyonunun y eksenine göre 5 kat büzülmüş halidir. Grafikte görülüyor.



y=f(x)=2x+10 → y=5f(x)=5(2x+10)=10x+50 elde ederiz. Tablo yapıp çizersek b) deki grafiği elde ederiz.

y=f(x)=2x+10 → y=0.2f(x)=0.2(2x+10)=0.4x+2 elde ederiz. Tablo yapıp çizersek c) deki grafiği elde ederiz.

Or315) y=f(x)=x^2-4 olduğuna göre y=10f(x) ve y=0.1f(x) fonksiyonlarının grafiklerini çizin.
Çözüm:



10f(x), f(x) fonksiyonunun y eksenine göre 10 kat genişlemiş halidir.
0.1f(x), f(x) fonksiyonunun y eksenine göre 10 kat büzülmüş halidir. Grafikte görülüyor.

y=f(x)=x^2-4 → y=10f(x)=10(x^2-4)=10x^2-40 elde ederiz. Tablo yapıp çizersek b) deki grafiği elde ederiz.

$y=f(x)=x^2-4 \rightarrow y=0.1f(x)=0.1(x^2-4)=0.1x^2-0.4$ elde ederiz. Tablo yapıp çizersek c) deki grafiği elde ederiz.

mt44-********************

Function Type	Examples
Linear	$2x+5, \quad -3x+4$
Power	$x^4, \quad 6x^3$
Polynomial	$x^3-2x+1, \quad 3x^5+2x^4-7x^3+x+4$
Rational	$(x^2+3x-2)/6x^3-1)$
Algebraic	$\sqrt{x}, \quad (x^2+5x)^{1/3}$
Trigonometric	$\sin x, \quad \cos x, \quad \tan x$
Inverse trigonometric	$\sin^{-1} x, \quad \tan^{-1} x$
Exponential	$10^x, \quad e^x, \quad 2^{-x}$
Logarithmic	$\log_{10} x, \quad \ln x$
Hyperbolic	$\sinh x, \quad \cosh x$
Inverse hyperbolic	$\sinh^{-1} x, \quad \tanh^{-1} x$