

İkinci derece polinomlar

$f(x) = ax^2 + bx + c$ şeklindeki fonksiyonlar ikinci derece polinom olarak bilinir ve mühendislikte çok kullanılır.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

eşitliğini sağlayan iki tane x değeri vardır.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ise karekök alınabilir ve kökler reeldir.

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ise karekök kompleks sonuç verir, kökler komplekstir. kökler kompleks ise bu kökler eşleniktir.

$\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ise karekök sonucu sıfırdır. kökler eşittir. $x_1 = x_2$,

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin iki kökü vardır.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Or206) $x^2 + 2x - 3 = 0$ eşitliğini sağlayan x değerlerini bulun.

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 + 4}{2} = 1,$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 - 4}{2} = -3,$$

Or208) $2x^2 + 4x - 6 = 0$ eşitliğini sağlayan x değerlerini bulun.

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 + \sqrt{64}}{4} = \frac{-4 + 8}{4} = 1,$$

$$x_2 = \frac{-4 - \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 - \sqrt{64}}{4} = \frac{-4 - 8}{4} = -3,$$

Or211) $3x^2 + 2x - 5 = 0$ eşitliğini sağlayan x değerlerini bulun.

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 + \sqrt{64}}{6} = \frac{-2 + 8}{6} = 1,$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 - \sqrt{64}}{6} = \frac{-2 - 8}{6} = \frac{-10}{6} = -1.666,$$

Or214) $3x^2 - 2x - 5 = 0$ eşitliğini sağlayan x değerlerini bulun.

$$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 + \sqrt{64}}{6} = 1.666,$$

$$x_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 - \sqrt{64}}{6} = \frac{2 - 8}{6} = -1,$$

Or217) $x^2 + 4x + 13 = 0$ eşitliğini sağlayan x değerlerini bulun.

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 + \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 + \sqrt{36} \sqrt{-1}}{2} = \frac{-4 + 6i}{2} = -2 + 3i$$

$$x_2 = \frac{-4 - \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 - \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 - \sqrt{36} \sqrt{-1}}{2} = \frac{-4 - 6i}{2} = -2 - 3i$$

İkinci derece polinomun kökleri eşleniktir. kokun birisi $p+qi$ ise diğer kok $p-qi$ dir. Yukarıdaki örnekte $-2+3i$ yi bulduğumuzda, ikinci koku bulmaya gerek yoktur. ikinci kok $-2-3i$ olacaktır.

Or217) $2x^2 + 8x + 26 = 0$ eşitliğini sağlayan x değerlerini bulun.

$$x_1 = \frac{-8 + \sqrt{8^2 - 4 \cdot 2 \cdot 26}}{2 \cdot 2} = \frac{-8 + \sqrt{-144}}{4} = \frac{-8 + \sqrt{144} \sqrt{-1}}{4} = \frac{-8 + 12i}{4} = -2 + 3i$$

$$x_2 = \frac{-8 - \sqrt{8^2 - 4 \cdot 2 \cdot 26}}{2 \cdot 2} = \frac{-8 - \sqrt{-144}}{4} = \frac{-8 - \sqrt{144} \sqrt{-1}}{4} = \frac{-8 - 12i}{4} = -2 - 3i$$

Or221) $4x^2 + 4x + 5 = 0$ eşitliğini sağlayan x değerlerini bulun.

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{4^2 - 4_x 4_x 5}}{2_x 4} = \frac{-4 + \sqrt{-64}}{8} = \frac{-4 + \sqrt{64} \sqrt{-1}}{4} = \frac{-4 + 8i}{8} = -0.5 + i$$

$$x_2 = \frac{-4 - \sqrt{4^2 - 4_x 4_x 5}}{2_x 4} = \frac{-4 - \sqrt{-64}}{8} = \frac{-4 - \sqrt{64} \sqrt{-1}}{4} = \frac{-4 - 8i}{8} = -0.5 - i$$

Orn Prb 91) $2x^2 + 6x + 4 = 0$ denkleminin köklerini bulun.

Çözüm: $x_1 = \frac{-6 + \sqrt{6^2 - 4_x 2_x 4}}{2_x 2} = \frac{-6 + \sqrt{36 - 32}}{4} = \frac{-4}{4} = -1$

$$x_2 = \frac{-6 - \sqrt{6^2 - 4_x 2_x 4}}{2_x 2} = \frac{-6 - \sqrt{36 - 32}}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

Orn Prb 93) $2x^2 + 8x + 10 = 0$ denkleminin köklerini bulun.

Çözüm: $x_1 = \frac{-8 + \sqrt{8^2 - 4_x 2_x 10}}{2_x 2} = \frac{-8 + \sqrt{64 - 80}}{4} = \frac{-8 + \sqrt{-16}}{4}$
 $= \frac{-8 + \sqrt{16} \sqrt{-1}}{4} = \frac{-8 + 4i}{4} = -2 + i$

x_2 , x_1 rin eşleniği olacaktır. x_2 yi hesaplamaya gerek yoktur. $x_2 = \overline{x_1} = \overline{-2 + i} = -2 - i$ olacaktır.

x_1 ri hesaplarken hata var mı kontrol için x_2 yi, hesaplayalım.

$$x_2 = \frac{-8 - \sqrt{8^2 - 4_x 2_x 10}}{2_x 2} = \frac{-8 - \sqrt{64 - 80}}{4} = \frac{-8 - \sqrt{-16}}{4}$$

$$= \frac{-8 - \sqrt{16} \sqrt{-1}}{4} = \frac{-8 - 4i}{4} = -2 - i$$

Orn Prb 95) $0.5x^2 + 3x + 6.5 = 0$ denkleminin köklerini bulun.

Çözüm:

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{3^2 - 4_x 0.5_x 6.5}}{2_x 0.5} = \frac{-3 + \sqrt{-4}}{1} = \frac{-3 + \sqrt{4} \sqrt{-1}}{1} = -3 + 2i$$

x_2 , x_1 rin eşleniği olacaktır. $x_2 = -3 - 2i$ olacaktır.

$x^2 + bx + c = 0$ polinomum kökleri m ve n ise

$$x^2 + bx + c = (x - m)(x - n) = x^2 - nx - mx + mn = x^2 - (m + n)x + mn$$

bağıntısı geçerli olacaktır.

$$b=-(m+n), \quad c=mn$$

Bu durumu Yukarıdaki örneklerde görebiliriz.

$x^2+bx+c = x^2+2x-3 = 0$ in kökleri $m=1$, $n=-3$, olarak bulunmuştu.

$$-(m+n) = -(1-3) = 2 = b$$

$$mn = (1)(-3) = -3$$

$ax^2+bx+c=0$ polinomum kökleri m ve n ise

$ax^2+bx+c = a(x-m)(x-n) = a(x^2 - nx - mx + mn) = ax^2 - a(m+n)x + amn$
bağıntısı geçerli olacaktır.

$$b = -a(m+n), \quad c = amn$$

$ax^2+bx+c = 2x^2+4x-6=0$ in kökleri $m=1$, $n=-3$, olarak bulunmuştu.

$$-a(m+n) = -2(1-3) = -2(-2) = 4 = b$$

$$amn = 2 \cdot 1 \cdot (-3) = -6 = c$$

***** Kompleks kökler *****

$x^2+bx+c=0$ polinomum kökleri $(p+qi)$ ve $(p-qi)$ ise

$$\begin{aligned} [x-(p+qi)] [x-(p-qi)] &= (x-p-qi)(x-p+qi) \\ &= x^2 - px + qix - px + p^2 - pqi - qix + pqi - q^2i^2 \\ &= x^2 - 2px + p^2 + q^2 \end{aligned}$$

Burada $+qix$ ve $-qix$, ve $+pqi$ ve $-pqi$ birbirini oturur.

$i^2 = -1$ olduğundan $-q^2i^2 = -q^2(-1) = q^2$ olur.

sonuç: $x^2+bx+c=0$ denkleminin kökleri $p+qi$, $p-qi$ şeklinde kompleks ise,

$$x^2 + bx + c = x^2 - 2px + p^2 + q^2$$

$$b = -2p, \quad c = p^2 + q^2$$

$x^2+4x+13=0$ in kökleri $x_1=-2+3i$, $x_2=-2-3i$, olarak bulunmuştu.

$$p = -2, \quad q = 3,$$

$$-2p = 4 = b,$$

$$p^2 + q^2 = (-2)^2 + 3^2 = 13 = c,$$

$ax^2+bx+c=0$ denkleminin kökleri $p+qi$, $p-qi$ şeklinde kompleks ise,

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 - 2apx + a(p^2 + q^2))$$

$$b = -2ap, \quad c = a(p^2 + q^2)$$

$2x^2+8x+26=0$ denkleminin kökleri $-2+3i$, $-2-3i$ olarak bulunmuştu.

$$p=-2, q=3$$

$$-2ap=-2 \cdot 2 \cdot (-2)=8=b$$

$$a(p^2 + q^2)=2[(-2)^2+3^2]=2(13)=26=c$$

Pratik kok bulma tekniği:

$$x^2+bx+c=x^2 -(m+n)x + mn=0$$

çarpımları c, toplamlarının ters işaretlisi b olan iki sayı arıyoruz.

Or261) $x^2-3x+2=0$ köklerini bulun.

Çözüm: çarpımları 2, toplamları $-(-3)=3$ olan iki sayı arıyoruz.

$$m=2, n=1, mn=2, m+n=2+1=3.$$

Or263) $x^2+3x+2=0$ köklerini bulun.

Çözüm: çarpımları 2, toplamları $-(3)=-3$ olan iki sayı arıyoruz.

$$m=-2, n=-1, mn=(-1)(-2)=2, m+n=-2-1=-3.$$

Or265) $x^2+2x-3=0$, köklerini bulun.

Çözüm: çarpımları -3, toplamları $-(2)=-2$ olan iki sayı arıyoruz.

$$m=-3, n=1, mn=3(-1)=-3, m+n=-3+1=-2.$$

$ax^2+bx+c=0$ Özel Haller

b=0 hali

$$ax^2+c=0$$

$$x^2=-c/a$$

$$x_1=+\sqrt{-c/a}, \quad x_2=-\sqrt{-c/a}$$

Or271) $2x^2-8=0$ kökleri bulun.

$$\text{Çözüm: } 2x^2-8=0, \quad 2x^2=8,$$

$$x^2=8/2=4$$

$$x_1=+\sqrt{4}=2, \quad x_2=-\sqrt{4}=-2$$

Or273) $2x^2+8=0$ kökleri bulun.

$$\text{Çözüm: } 2x^2+8=0, \quad 2x^2=-8,$$

$$x^2=-8/2=-4$$

$$x_1=+\sqrt{-4}=+\sqrt{4} \sqrt{-1}=2i, \quad x_2=-2i$$

c=0 hali

$$ax^2+bx=0$$

$$x(ax+b)=0,$$

$$ax+b=0, \quad x=-b/a$$

$$x_1=0, \quad x_2=-b/a$$

Or273) $2x^2+8x=0$ kökleri bulun.

$$\text{Çözüm: } 2x^2+8x=0,$$

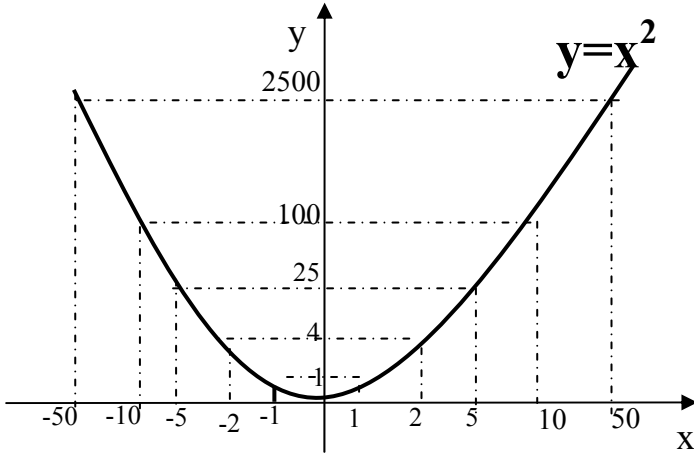
$$x(2x+8)=0$$

$$x_1=0, \quad x_2=-8/2=4$$

İkinci derece polinomların grafiği

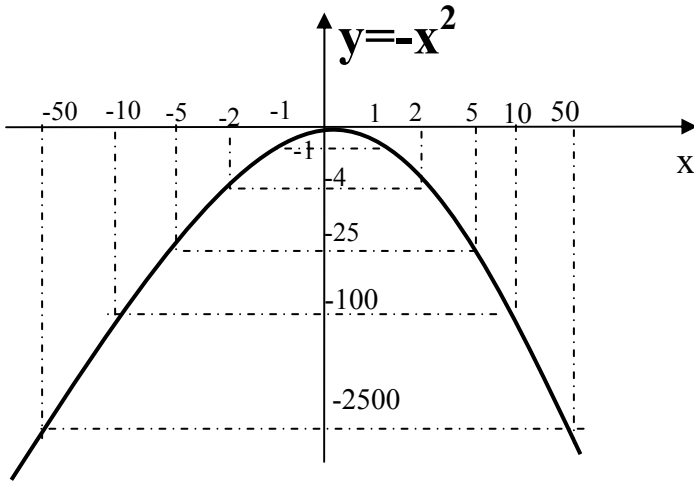
Or411) $y=x^2$ nin grafiği. x e çeşitli değerler verip grafiği çizelim.

x	-50	-10	-5	-2	-1	0	1	2	5	10	20	50
$y=f(x)=x^2$	2500	100	25	4	1	0	1	4	25	100	400	2500



Or411) $y=-x^2$ nin grafiği. x e çeşitli değerler verip grafiği çizelim.

x	-50	-10	-5	-2	-1	0	1	2	5	10	20	50
$y=f(x)=-x^2$	-2500	-100	-25	-4	-1	0	-1	-4	-25	-100	-400	-2500

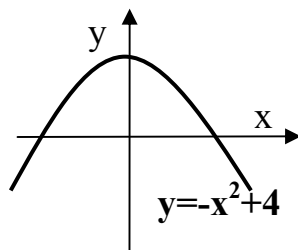
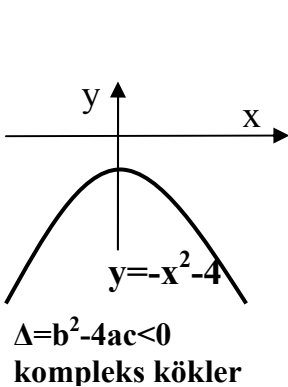
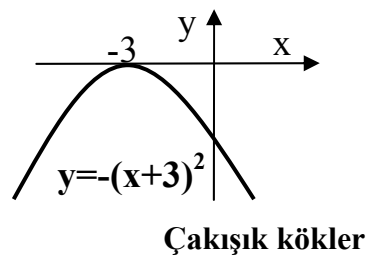
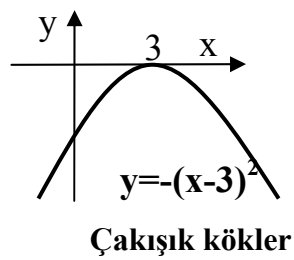
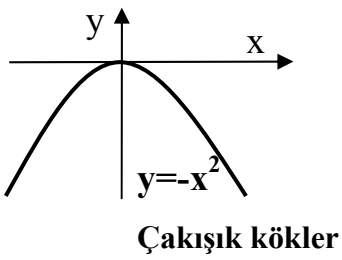
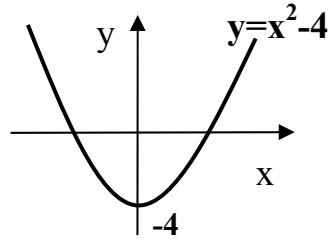
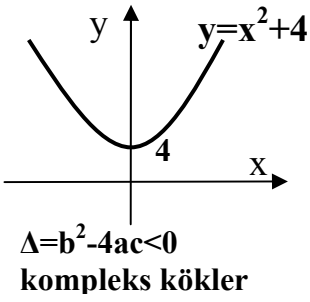
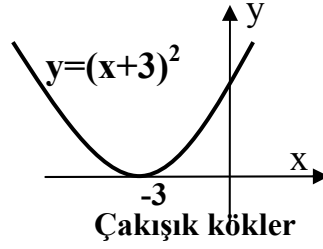
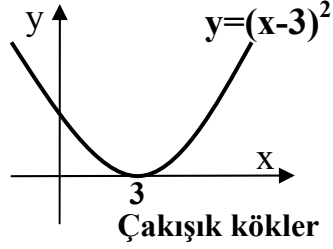
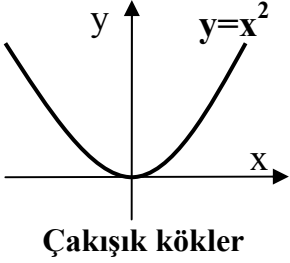


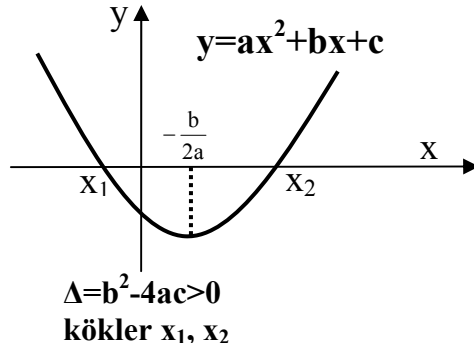
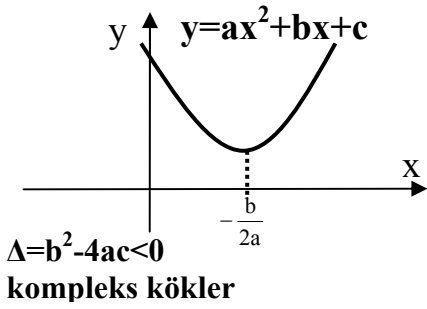
Or421) $y=ax^2+bx+c$ in grafiği.

- $a>0$ ise grafiğin yönü yukarı doğru, $a<0$ ise grafiğin yönü aşağı doğrudur.
- $ax^2+bx+c=0$ denkleminin köklerine göre x_1, x_2 olsun.
 - $\Delta=b^2-4ac>0$, ise x_1, x_2 reeldir. Grafik x eksenini x_1 ve x_2 de keser.
 - $\Delta=b^2-4ac<0$, ise x_1, x_2 kompleksdir. Grafik x eksenini kesmez.
 - $\Delta=b^2-4ac=0$, ise $x_1=x_2$ olur. Grafik x eksenini tek x_1 noktasında keser
- $a>0$ ise grafiğin minimumu vardır. $a<0$ ise grafiğin maksimumu vardır. grafiğin maksimumu ve minimumunun x koordinatı,

$$x_m = -\frac{b}{2a}$$

ile verilir.





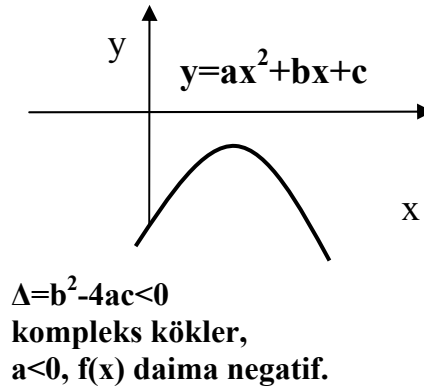
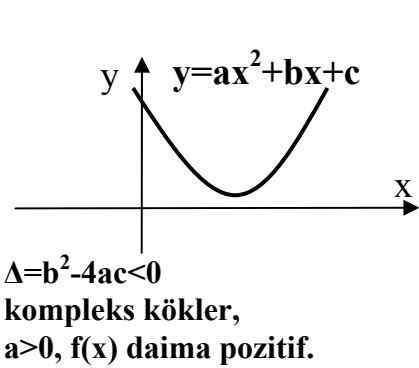
$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ nin işareti

x in hangi değerleri için $f(x)$ pozitif, hangi değerleri için negatiftir.

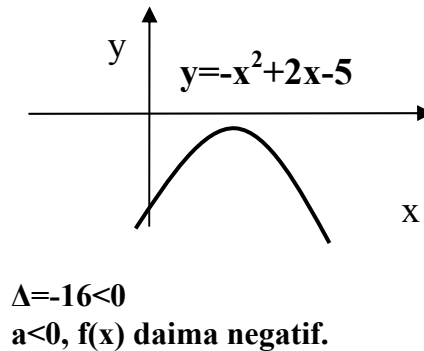
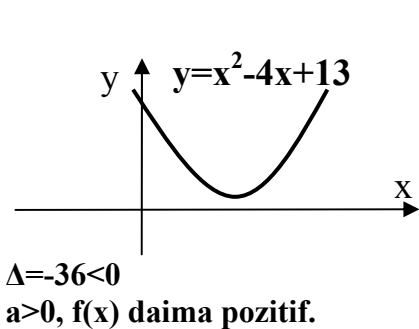
Verilen bir x için $f(x)$ i hesaplayabiliriz. Buradan $f(x)$ pozitif veya negatif olduğunu bulabiliriz.

Pratikte su yöntemle $f(x)$ in işaretini bulabiliriz.

A) $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, kökler kompleks ise $f(x)$ in işareti her yerde a nin işaretidir.



Örnekler:



$y = f(x) = x^2 - 4x + 13$ fonksiyonunda x e hangi değeri verirsek verelim, $f(x)$ daima pozitiftir.

$$x = -100 \rightarrow (-100)^2 - 4_x(-100) + 13 = 10413$$

$$x = -10 \rightarrow (-10)^2 - 4_x(-10) + 13 = 153$$

$$x = -5 \rightarrow (-5)^2 - 4_x(-5) + 13 = 58$$

$$x = -1 \rightarrow (-1)^2 - 4_x(-1) + 13 = 18$$

$$x = 0 \rightarrow (0)^2 - 4_x(0) + 13 = 13$$

$$x = 1 \rightarrow (1)^2 - 4_x(1) + 13 = 10$$

$$x = 5 \rightarrow (5)^2 - 4_x(5) + 13 = 18$$

$$x=10 \rightarrow (100)^2 - 4_x(100) + 13 = 9653$$

$y=f(x)=-x^2+2x-5$ fonksiyonunda x e hangi değeri verirsek verelim, $f(x)$ daima negatiftir.

$$x=-100 \rightarrow -(-100)^2 + 2_x(-100) - 5 = -10205$$

$$x=-10 \rightarrow -(-10)^2 + 2_x(-10) - 5 = -125$$

$$x=-5 \rightarrow -(-5)^2 + 2_x(-5) - 5 = -40$$

$$x=-1 \rightarrow -(-1)^2 + 2_x(-1) - 5 = -8$$

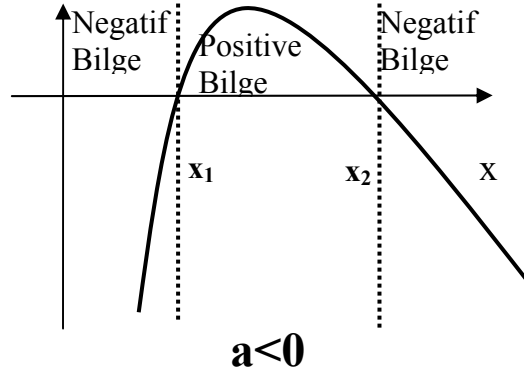
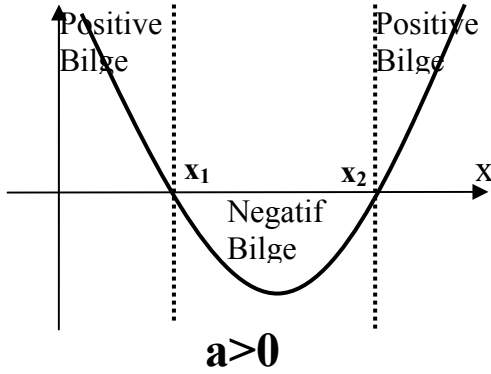
$$x=0 \rightarrow = -5$$

$$x=2 \rightarrow -(2)^2 + 2_x(2) - 5 = -5$$

$$x=10 \rightarrow -(10)^2 + 2_x(10) - 5 = -85$$

$$x=100 \rightarrow -(100)^2 + 2_x(100) - 5 = -9805$$

B) $\Delta=b^2-4ac>0$, kökler reeldir. $f(x)$ in işareti iki kök arasında a nin işaretinin tersidir. diğer yerlerde a nin işareti ile aynıdır.



Or431) $y=f(x)=x^2-3x+2$ fonksiyonunun işaretini inceleyin.

Çözüm: x^2-3x+2

$$x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = 2, \quad x_2 = 1$$

$a=1>0$, o halde kökler arası negatif, diğer yerler pozitif.

$-\infty < x < 1$ $f(x)$ pozitif

$1 < x < 2$ $f(x)$ negatif

$2 < x < \infty$ $f(x)$ pozitif

Kontrol: $x=-2$ köklerin dışında pozitif olmalı.

$$(-2)^2 - 3(-2) + 2 = 12 > 0$$

$x=1.5$ köklerin arasında negatif olmalı

$$(1.5)^2 - 3(1.5) + 2 = 2.25 - 4.5 + 2 = -0.25 < 0$$

$x=2.5$ köklerin dışında pozitif olmalı

$$(2.5)^2 - 3(2.5) + 2 = 6.25 - 7.5 + 2 = 0.75 > 0$$

Or433) $y=f(x) = -x^2 + 6x - 8$ fonksiyonunun işaretini inceleyin.

Çözüm: $x^2 - 3x + 2$

$$x_1 = \frac{-6 + \sqrt{6^2 - 4(-1)(-8)}}{2(-1)} = 2, \quad x_2 = 4$$

$a = -1 < 0$, o halde kökler arası pozitif, diğer yerler negatif.

$-\infty < x < 2$ $f(x)$ negatif

$2 < x < 4$ $f(x)$ pozitif

$4 < x < \infty$ $f(x)$ negatif

Kontrol: $x=0$ köklerin dışında negatif olmalı.

$$-(0)^2 + 6(0) - 8 = -8 < 0$$

$x=3$ köklerin arasında pozitif olmalı

$$-(3)^2 + 6(3) - 8 = 1 > 0$$

$x=5$ köklerin dışında negatif olmalı

$$-(5)^2 + 6(5) - 8 = -3 < 0$$