Yüksek Derece Polinomlar

$f(x)= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} +....+a_1x+a_0$

seklindeki fonksiyonlar n inci dereceden polinom denir.

$f(x)= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} +....+a_1x+a_0 =0$

a) seklindeki denklemin n tane koku vardır. kökler $x_1,x_2,....x_n$ olsun.

$f(x)= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} +....+a_1x+a_0$

$=(x-x_1)\ (x-x_2).....\ (x-x_n)$

seklinde yazılabilir.

b) kökler reel veya kompleks olabilir.

c) kompleks bir kok varsa, o kokun eşleniği de mutlaka koktur. Yani kökler eşlenik halde bulunurlar. 3+4i kok ise 3-4i de mutlaka koktur.

d) n tek ise köklerden bir tanesi mutlaka reeldir.

Or436) $x=1$, $P(x)=2x^2+2x-12$, polinomunun bir kokumudur.

Cevap: $P(2)=2_x1^2 + 2_x1-12 = -8$,

$x=1$, $P(x)$ polinomunun koku değildir.

Or437) $x=2$, $P(x)=2x^2+2x-12$, polinomunun bir kokumudur.

Cevap: $P(2)=2_x2^2 + 2_x2-12 =0$, $x=2$, $P(x)$ polinomunun bir kokudur.

İki polinomun Çarpımı

İki polinomun çarpımı cebrik işlemlerdir.

$(ax^3+bx^2+cx+d)(px^2+qx+r)= ax^3(px^2+qx+r) + bx^2(px^2+qx+r) + cx(px^2+qx+r)$
$+ d(px^2+qx+r)$

$=apx^5+aqx^4+ arx^3 + bpx^4+ bqx^3+ brx^2 + cpx^3+ cqx^2+ crx$
$+ dpx^2+ dqx+ dr$

$=apx^5+(aq+bp)x^4+ (ar+bq+cp)x^3 + (br+cq+dp)x^2 + (cr+dq)x +dr$

Or445)

$(2x^3+3x^2)(5x^2+6) =2_x5\ x^5+2_x6\ x^3 +3_x5\ x^4 +3_x6\ x^2 =10x^5+12x^3+15x^4+18x^2$

İki polinomun bolumu

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} = ?$$

İki polinomun bolumu iki tamsayının bölümüne benzer.

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1x + a_0 \;\Big|\; \frac{b_m x^m + b_{n-1}x^{m-1} + \ldots\ldots + b_1 x + b_0}{\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \ldots}$$

Or451) $\dfrac{4x^3 + 4x^2 + 3x + 10}{2x + 5}$,

$4x^3+4x^2+3x+10 \;\big|\; 2x+5$ $4x^3+10x^2 \quad\quad\; \big|\; 2x^2$	$4x^3+4x^2+3x+10 \;\big|\; 2x+5$ $\mp 4x^3 \mp 10x^2 \quad\quad \big|\; 2x^2$ $-6x^2+3x+10$
İlk terimi ilk terime böleriz $4x^3/2x=2x^2$ $2x^2$ ile bolum terimi (2x+5) yi çarparız $2x^2(2x+5)=4x^3+10x^2$	sonucu bölünen terimden çıkarırız $4x^3+4x^2+3x+10$ -- $4x^3+10x^2$ ------------------------------------- $0 \;\; -6x^2+3x+10$

Yeni bölünen terim **$-6x^2+3x+10$ dir. işlemlere aynen devam ederiz.**

$4x^3 \;+4x^2+3x+10 \;\big|\; 2x+5$ $\mp 4x^3 \mp 10x^2 \quad\quad \big|\; 2x^2-3x$ $-6x^2+3x+10$ $-6x^2-15x$	$4x^3 \;+4x^2+3x+10 \;\big|\; 2x+5$ $\mp 4x^3 \mp 10x^2 \quad\quad \big|\; 2x^2-3x+9$ $-6x^2+3x+10$ $\pm 6x^2 \pm 15x$ $0 + \;18x+10$
İlk terimi ilk terime böleriz $-6x^2/2x=-3x$ $-3x$ ile bolum terimi (2x+5) yi çarparız $-3x(2x+5)=-6x^2-15x$	sonucu bölünen terimden çıkarırız $-6x^2+3x+10$ -- $-6x^2-15x$ ------------------------------------- $0 \;\; 18x+10$

Yeni bölünen terim **$18x+10$ dir. işlemlere aynen devam ederiz.**

$4x^3 \;+4x^2+3x+10 \;\big|\; 2x+5$ $\mp 4x^3 \mp 10x^2 \quad\quad \big|\; 2x^2-3x+9$ $-6x^2+3x+10$ $\pm 6x^2 \pm 15x$ $18x+10$ $18x+45$	$4x^3 \;+4x^2+3x+10 \;\big|\; 2x+5$ $\mp 4x^3 \mp 10x^2 \quad\quad \big|\; 2x^2-3x+9$ $-6x^2+3x+10$ $\pm 6x^2 \pm 15x$ $18x+10$ $\pm 18x \pm 45$ -35
İlk terimi ilk terime böleriz $18x/2x=9$ $9x$ ile bolum terimi (2x+5) yi çarparız $9(2x+5)=18x+45$	sonucu bölünen terimden çıkarırız $18x+10$ -- $18x+45$ -------------------------------------

	0 -35

Sonuç: $\frac{4x^3+4x^2+3x+10}{2x+5}$ = $2x^2$-3x+9, Kalan terim: -35

iki polinomun bolumu iki tamsayının bölümüne benzetebiliriz.

$\frac{17}{5}$=?, $\frac{17}{5}$=3 kalan 2,

17=3x5+2 veya $\frac{17}{5}=3+\frac{2}{5}$

Şekillerinde yazabiliriz.

Polinomlarda da durum aynidir.

$\frac{A(x)}{B(x)}$=? A(x)=B(x)C(x) + Q(x), Burada C(x) bolum, Q(x) kalan polinomdur.

$$\frac{A(x)}{B(x)}=C(x)+\frac{Q(x)}{B(x)}$$

Yukaridaki bölme işleminde

$4x^3+4x^2+3x+10 = (2x+5)\,(2x^2-3x+9) + (-\,35)$

seklinde yazarız.

Örnekler:

$\frac{2x^2+4x+5}{x-2}=?$

$2x^2+4x+5$	x-2
$\mp 2x^2 \pm 4x$	2x+8
8x+5	
$\mp 8x \pm 16$	
21	

$\frac{2x^2+4x+5}{x-2}=2x+8+\frac{21}{x-2}$

-- --
-- --
-- --
-- --

$\frac{3x^3+7x^2+2x+4}{-3x+6} = ?$

$$
\begin{array}{l|l}
3x^3+7x^2+2x+4 & \text{-3x+6} \\
\hline
\mp 3x^3 \pm 6x^2 & -x^2-(13/3)x-(28/3) \\
\overline{13x^2+2x+4} & \\
\mp 13x^2 \pm 26x & \\
\overline{\text{28x+4}} & \\
\mp 28x \pm 56 & \\
\overline{\text{60}} &
\end{array}
$$

$\frac{3x^3+7x^2+2x+4}{-3x+6} = -x^2-(13/3)x-(28/3)+\frac{60}{-3x+6}$

$\frac{3x^2+7x+2}{-x-1} = ?$

$$
\begin{array}{l|l}
3x^2+7x+2 & \text{-x-1} \\
\hline
\mp 3x^2 \mp 3x & \text{-3x-4} \\
\overline{\text{4x+2}} & \\
\mp 4x \mp 4 & \\
\overline{\text{-2}} &
\end{array}
$$

$\frac{3x^2+7x+2}{-x-1} = -3x-4+\frac{-2}{-x-1}$

$\frac{4x^3-5x^2-8x+2}{3x^2+x-2} = ?$

$4x^3-5x^2-8x+2$	$3x^2+x-2$
$\mp 4x^3 \mp (4/3)x^2 \pm (8/3)x$	(4/3)x-(19/9)
$-(19/3)x^2-(16/3)x+2$	
$\pm(19/3)x^2 \pm (19/9)x \mp (38/9)$	
$0x^2-(29/9)x-(20/9)$	
$\mp 0x^2 \mp 0x \pm 0$	
-(29/9)x-(20/9)	

$\frac{4x^3-5x^2-8x+2}{3x^2+x-2} = (4/3)x-(19/9)+\frac{-(29/9)x-(20/9)}{3x^2+x-2}$

$\frac{x^5+2x^4+5x^3+6x^2+7x+9}{x^3+2x^2+5x+7} = ?$

$x^5+2x^4+5x^3+6x^2+7x+9$	x^3+2x^2+5x+7
$\mp x^5 \mp 2x^4 \mp 5x^3 \mp 7x^2$	x^2
$-x^2+7x+9$	

$\frac{x^5+2x^4+5x^3+6x^2+7x+9}{x^3+2x^2+5x+7} = x^2+\frac{-1x^2+7x+9}{x^3+2x^2+5x+7}$

$\frac{x+2}{x-2} = ?$

$$
\begin{array}{l|l}
x+2 & x-2 \\ \hline
\mp x \pm 2 & 1 \\ \cline{1-1}
4 &
\end{array}
$$

$\frac{x+2}{x-2} = 1 + \frac{4}{x-2}$

$\frac{x^5+2x^4+5x^3+6x^2+7x+9}{x^4+2x^3+5x^2+7x+8} = ?$

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 7x + 9 & x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 7x + 8 \\ \hline
\mp x^5 \mp 2x^4 \mp 5x^3 \mp 7x^2 \mp 8x & x \\ \cline{1-1}
-x^2 - x + 9 &
\end{array}
$$

Kalan sıfır ise sayılar tam bölünüyor demektir. Pay, paydadaki sayının tam katidir.

$\frac{18}{3}=6, \quad 18=3_x6+0$

$\frac{4x^3+4x^2+3x-45}{2x+5}=2x^2-3x+9$ kalan 0

Polinomların bölümünde kalan sıfır ise pay ve payda polinomlarının kökleri ortaktır.

Or471)

$\frac{x^2+3x+2}{x+1}=?$

x^2+3x+2	x+1
$\mp x^2 \mp x$	x+2
2x+2	
$\mp 2x \mp 2$	
0	

$\frac{x^2+3x+2}{x+1}=x+2+\frac{0}{x+1}$

$\frac{x^2+3x+2}{x+1}$=x+2, kalan 0

$x^2+3x+x=0$ polinomun kökleri $x_1=-1$, $x_2=-2$,

$x+1=0$ polinomun koku $x_1=-1$

-1 koku pay ve payda'da ortak.

Or473)

$\frac{x^4+10x^3+35x^2+50x+24}{x^2+5x+4}=?$

$x^4+10x^3+35x^2+50x+24$	x^2+5x+4
$\mp x^4 \mp 5x^3 \mp 4x^2$	x^2+5x+6
$5x^3+31x^2+50x+24$	
$\mp 5x^3 \mp 25x^2 \mp 20x$	
$6x^2+30x+24$	
$\mp 6x^2 \mp 30x \mp 24$	
0	

$\frac{x^4+10x^3+35x^2+50x+24}{x^2+5x+4}=x^2+5x+6+\frac{0}{x^2+5x+4}$

$\frac{x^4+10x^3+35x^2+50x+24}{x^2+5x+4}$=$x^2+5x+6$, kalan 0

$x^4+10x^3+35x^2+50x+24=0$ polinomunun kökleri -1, -2, -3, -4,

$x^2+5x+4=0$ polinomunun kökleri -1,-4

-1,-4 kökleri pay ve payda'da ortak.

Or475)

$\frac{x^4-3x^3-11x^2+93x-260}{x^2-4x+13}=?$

$$\begin{array}{l|l}
x^4-3x^3-11x^2+93x-260 & x^2-4x+13 \\ \hline
\mp x^4 \pm 4x^3 \mp 13x^2 & x^2+x-20 \\ \cline{1-1}
x^3-24x^2+93x-260 & \\
\mp x^3 \pm 4x^2 \mp 13x & \\ \cline{1-1}
-20x^2+80x-260 & \\
\pm 20x^2 \mp 80x \pm 260 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

$$\frac{x^4-3x^3-11x^2+93x-260}{x^2-4x+13}=x^2+x-20+\frac{0}{x^2-4x+13}$$

x^4-$3x^3$- $11x^2$+93x-260=0 polinomunun kökleri 2+3i, 2-3i, 4,-5,

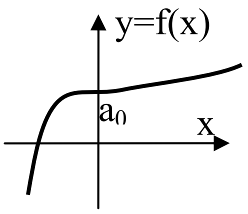
x^2-4x+13=0 polinomunun kökleri 2+3i, 2-3i,

2+3i, 2-3i, kökleri pay ve payda'da ortak.

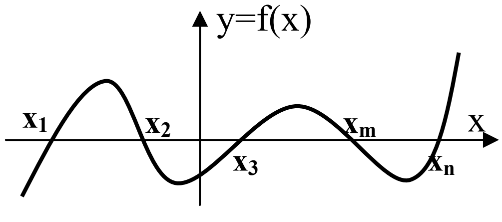
Polinomların Grafiklerinin Çizimi

$f(x)= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} +....+a_1x+a_0$

a) Grafik y eksenini sadece a_0 noktasında keser.

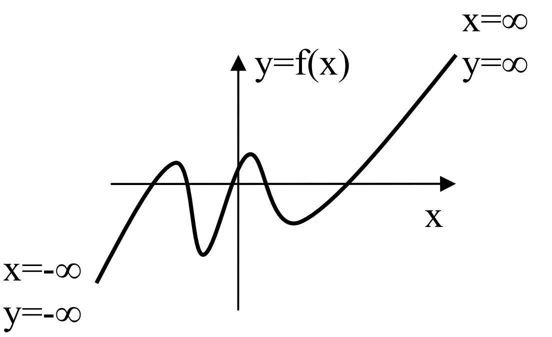
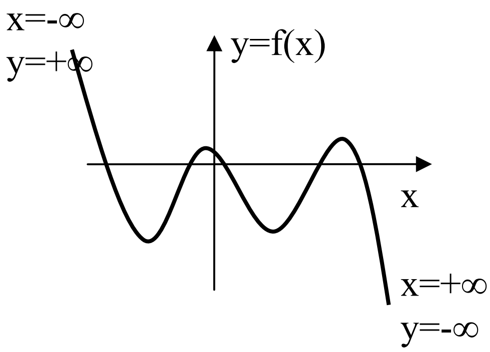


b) Grafik x eksenini f(x)=0 denklemini sağlayan x noktalarında keser.

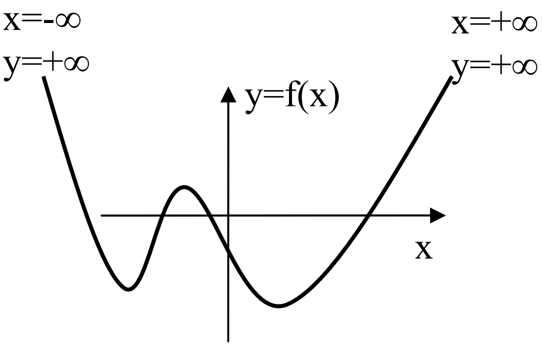
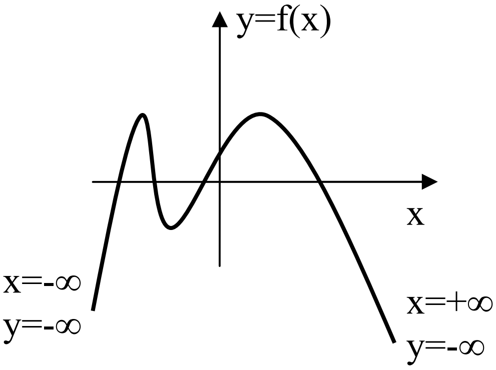


c) Grafiğin x= -∞ ve x=+∞ daki değerleri.

c1) n tek ise

	
$a_n>0$ ise x=-∞ için y=f(x) = -∞ x=+∞ için y=f(x) = +∞	$a_n<0$ ise x=-∞ için y=f(x) = ∞ x=+∞ için y=f(x) =-∞

c2) n çift ise

	
$a_n>0$ ise x=-∞ için y=f(x) = +∞ x=+∞ için y=f(x) = +∞	$a_n<0$ ise x=-∞ için y=f(x) = -∞ x=+∞ için y=f(x) =-∞

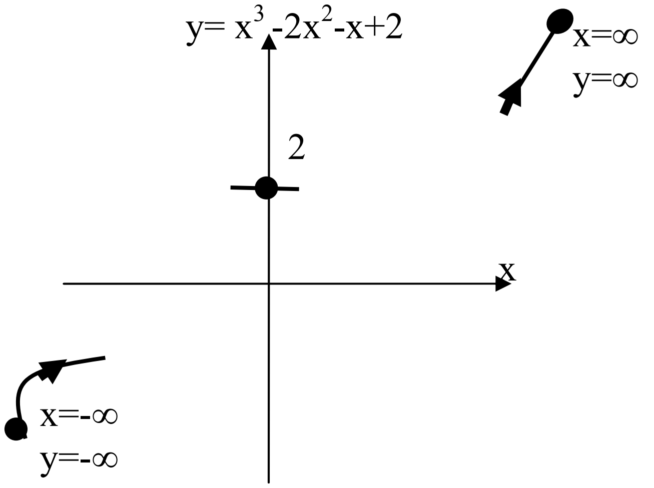
Or441) $y=f(x)= x^3 -2x^2-x+2$ grafiğini çizin.

$a_3=1>0$

x=-∞ için y=f(x) = -∞

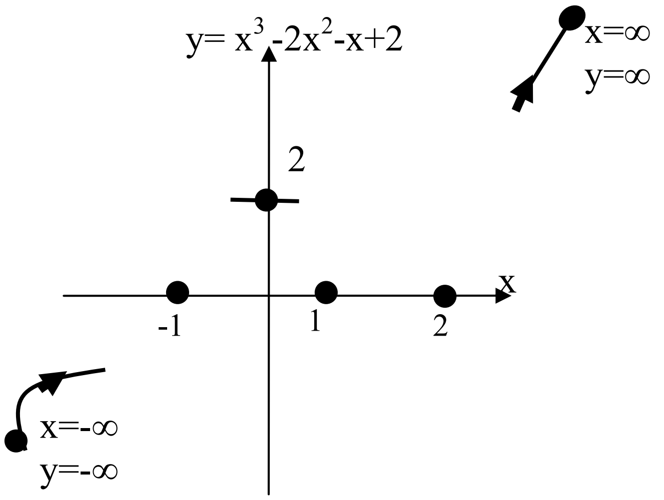
x=+∞ için y=f(x) = +∞

y eksenini kestiği nokta y=2. Bu bilgiler ışığında aşağıdaki grafiği çizeriz.

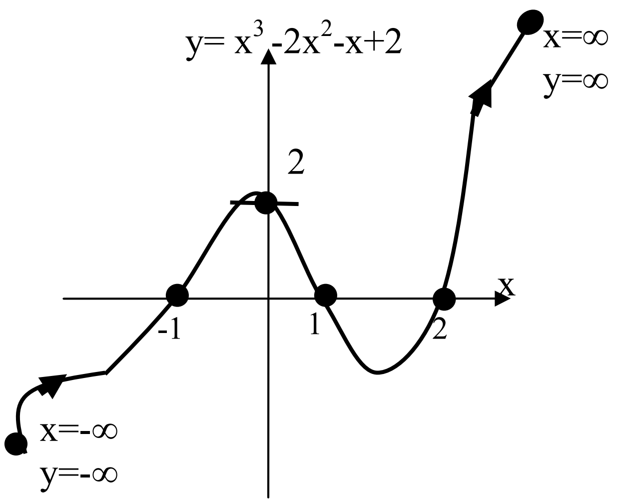


grafiği daha ayrıntılı çizebilmemiz için, $f(x)= x^3 -2x^2-x+2=0$ denkleminin köklerini bulmamız lazım. kökleri ancak bilgisayar yardımıyla bulabiliriz.

kökler $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=2$,



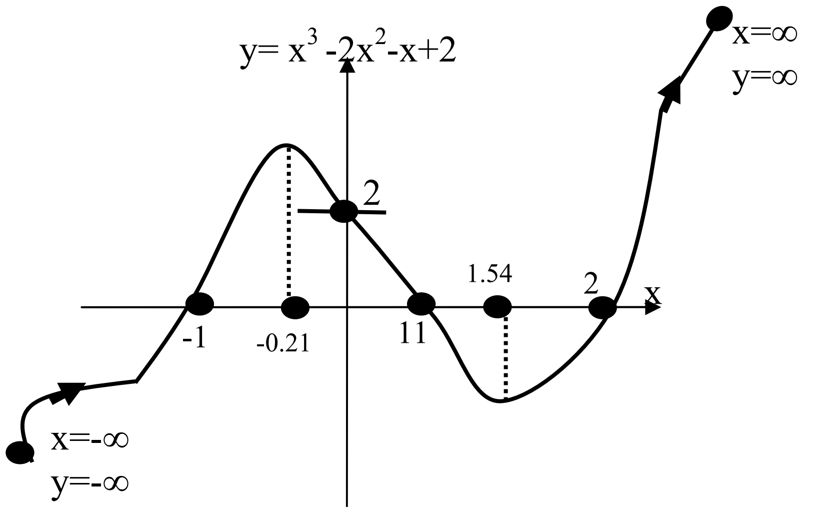
Tahmini olarak grafiği tamamlarız.



grafiği daha ayrıntılı çizebilmek için türev alıp donum noktalarını bulmamız gerekir.

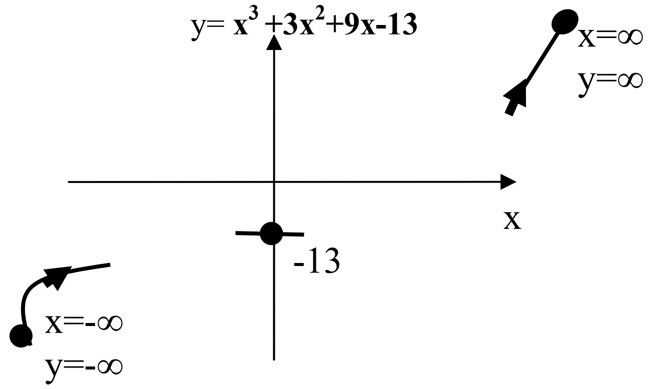
$y= x^3 -2x^2-x+2 \rightarrow y' =3x^2-4x-1=0 \rightarrow x_1=-0.215, \quad x_2=1.548$

donum noktaları $x_1=-0.215, \quad x_2=1.548$



Or445) $y=f(x)= x^3 +3x^2+9x-13$ grafiğini çizin.

$a_3=1>0$

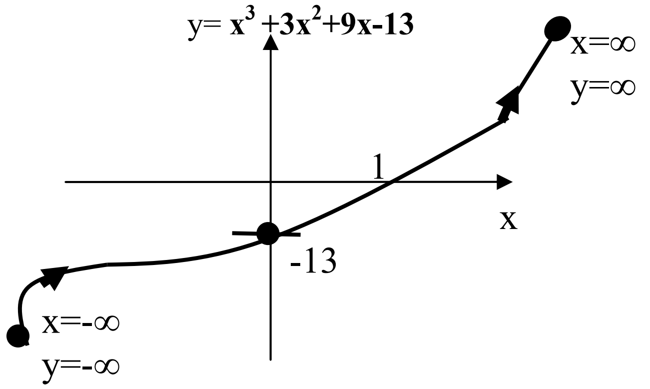


Bilgisayar yardımıyla $x^3 +3x^2+9x-13=0$ denklemin kökleri

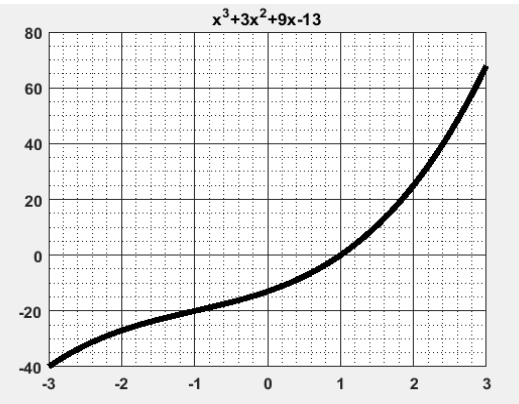
$x_1=1, \quad x_2= -2+3i, \qquad x_3= -2+3i$ olarak bulunur.

Grafik x eksenini sadece x=1 noktasında keser.

$y= x^3 +3x^2+9x-13=0, \quad \rightarrow y' =3x^2+6x+9$
$3x^2+6x+9=0$ denkleminin kökleri $x_1=-1+1.41i, \; x_1=-1-1.41i,$
Türevin kökleri komplekstir. türev hiçbir reel x değeri için sıfır olamaz. Bunun manası fonksiyonun maksimum ve minimumu yoktur, fonksiyonda dalgalanma yoktur.



Grafiğin bilgisayarda çizilmiş hali -3<x<3 ve -15<x<15 aralıklarında aşağıda verilmiştir.



***************** **

MT30

✓ **Difference of squares:** $a_2 - b_2 = (a + b)(a - b)$.
✓ **Greatest common factor (GCF):** $ab \pm ac = a(b \pm c)$.
✓ **Difference of cubes:** $a_3 - b_3 = (a - b)(a_2 + ab + b_2)$.
✓ **Sum of cubes:** $a_3 + b_3 = (a + b)(a_2 - ab + b_2)$.
✓ **Perfect square trinomial:** $a_2 \pm 2ab + b_2 = (a \pm b)_2$.
✓ **Trinomial factorization:** UnFOIL (see Chapter 1).
✓ **Common factors in groups:** Grouping (see Chapter 1).

Difference of squares: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Greatest common factor (GCF): $ab \pm ac = a(b \pm c)$.

Difference of cubes: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Sum of cubes: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Perfect square trinomial: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

Trinomial factorization: UnFOIL (see Chapter 1).

Common factors in groups: Grouping (see Chapter 1).

$$\begin{aligned} y &= 64x^8 - 64x^6 - x^2 + 1 \\ &= 64x^6\left(x^2 - 1\right) - 1\left(x^2 - 1\right) \\ &= \left(x^2 - 1\right)\left(64x^6 - 1\right) \end{aligned}$$

Now you factor the binomials as the difference of perfect squares. Then you can factor the last two new binomials usir the difference and sum of two perfect cubes:

$$= (x-1)(x+1)(8x^3-1)(8x^3+1)$$
$$= (x-1)(x+1)(2x-1)(4x^2+2x+1)(2x+1)(4x^2-2x+1)$$