Kesirli Polinomların Basit Kesirlere Ayrılması

$$\frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}{z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0} = \frac{A_1}{z - z_1} + \frac{A_2}{z - z_2} + \dots + \frac{A_{m-1}}{z - z_{m-1}} + \frac{A_m}{z - z_m}$$

Burada $z_1, z_2, \dots z_m$ payda polinomunun kökleridir.

$z^m + b_{m-1}z^{m-1} + b_{m-2}z^{m-2} + \dots\dots\dots b_1 z + b_0 = 0$

$(z-z_1)(z-z_2)\dots\dots\dots(z-z_m)=0$

Kesirli polinomlar bu şekilde basit kesirlere ayrılabilir.

OR128) a) $\frac{5x+17}{x^2+7x+12} = \frac{2}{x+3} + \frac{3}{x+4}$

b) $\frac{10x^2+42x+26}{x^3+5x^2-2x-24} = \frac{2}{x+3} + \frac{3}{x+4} + \frac{5}{x-2}$

c) $\frac{14x^3+52x^2-24x-122}{x^4+4x^3-7x^2-22x+24} = \frac{2}{x+3} + \frac{3}{x+4} + \frac{5}{x-2} + \frac{4}{x-1}$

Hesapların nasıl yapıldığı ilerideki bölümlerde açıklanacaktır.

Polinomların kökleri

$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots\dots\dots a_1 x + a_0 = 0$ polinomunun n adet kökü vardır.

n adet kök reel veya kompleks olabilir. Kompleks kökler eşlenik halde bulunur. $x=a+bi$ kök ise $x=a-bi$ de mutlaka köktür.

$x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ kok olsun. Bu durumda yukarıdaki polinom.

$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\dots\dots(x-x_n)=0$

seklinde yazılır.

Polinom	kökler	
$x+5=0$	$x_1=-5$	$(x+5)=0$
$x^2+3x+2=0$	$x_1=-2, \quad x_2=-1$	$(x+2)(x+1)=0$
$x^2-3x+2=0$	$x_1=2, \quad x_2=1$	$(x-2)(x-1)=0$
$x^2-x-2=0$	$x_1=2, \quad x_2=-1$	$(x-2)(x+1)=0$
$x^2-2x+5=0$	$x_1=1+2i, \quad x_2=1-2i$	$(x-1-2i)(x-1+2i)=0$
$x^2+2x+5=0$	$x_1=-1+2i, \quad x_2=-1-2i$	$(x+1-2i)(x+1+2i)=0$
$x^3+6x^2+11x+6=0$	$x_1=-1, \quad x_2=-2, \quad x_2=-3$	$(x+1)(x+2)(x+3)=0$

Basit Kesirlere Ayırma

$F(z)=\dfrac{c_p z^p + c_{p-1}z^{p-1} + c_{p-2}z^{p-2} + ... + c_1 z + c_0}{z^m + b_{m-1}z^{m-1} + b_{m-2}z^{m-2} + ... + b_1 z + b_0}$ seklindeki kesirli polinomda, yukarıda anlatıldığı gibi paydanın m adet kökü vardır.

Paydadaki en büyük kuvveti olan terimin katsayısı 1 den farklı ise pay ve payda bu katsayıya bölünerek paydanın en büyük kuvvet teriminin katsayısı 1 yapılır.

$$\frac{(8x^3+10x^2+12x+4)/2}{(2x^4+6x^3+14x^2+4x+16)/2}=\frac{4x^3+5x^2+6x+2}{x^4+3x^3+7x^2+2x+8}$$

p>m ise (payın derecesi, paydanın derecesinden büyükse) pay paydaya bölünür ve F(z) ifadesi

$$F(z)=\frac{c_p z^p + c_{p-1}z^{p-1} + c_{p-2}z^{p-2} + ... + c_1 z + c_0}{z^m + b_{m-1}z^{m-1} + b_{m-2}z^{m-2} + ... + b_1 z + b_0}=$$

$$= d_k z^k + d_{k-1}z^{k-1} + ... + d_1 z + d_0 + \frac{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0}{z^m + b_{m-1}z^{m-1} + ... + b_1 z + b_0}$$

k<p-m, ve n<m olacak şekilde yazılır.

$$\begin{array}{l|l}
c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + ... + c_1 z + c_0 & z^m + b_{m-1}z^{m-1} + ... + b_1 z + b_0 \\
\hline
.... & d_k z^k + d_{d-1}z^{d-1} + ... + d_1 z + d_0 \\
.... & \\
.... & \\
.... & \\
a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 &
\end{array}$$

Örnekler

a) $F(z)=\dfrac{2x^3+11x^2+23x+17}{x^2+3x+2}=2x+5+\dfrac{4x+7}{x^2+3x+2}$

b) $F(z)=\dfrac{10x^2+23x+6}{x^2+3x+2}=10+\dfrac{-7x-14}{x^2+3x+2}$

c) $F(z)=\dfrac{6x^4+8x^3+10x^2+23x+6}{x^2+3x+2}=6x^2-10x+28+\dfrac{-41x-50}{x^2+3x+2}$

d) $F(z)=\dfrac{2x^3+11x^2+23x+17}{x+2}=2x^2+7x+9+\dfrac{-1}{x+2}$

e) $F(z)=\dfrac{6x^4+8x^3+10x^2+23x+6}{x+2}=6x^3-4x^2+18x-13+\dfrac{32}{x+2}$

f) $F(z)=\dfrac{6x^4+8x^3+10x^2+23x+6}{x^3+6x^2+11x+6}=6x-28+\dfrac{112x^2+295x+174}{x^3+6x^2+11x+6}$

Bolum sonrası kalan kesirde payın derecesi, paydanın derecesinden 1 düşük olacak şekilde bölme işlemi yapılır.

Polinomların bölme işlemine Örnekler

Örnek 122) $F(z)=\dfrac{2x^3+11x^2+23x+17}{x^2+3x+2}$

$$\begin{array}{l|l}
2x^3+11x^2+23x+17 & x^2+3x+2 \\ \hline
\mp 2x^3 \mp 6x^2 \mp 4x & 2x+5 \\
\text{------------------------------} & \\
\quad 5x^2+19x+17 & \\
\quad \mp 5x^2 \mp 15x \mp 10 & \\
\quad \text{--------------------} & \\
\qquad 4x+7 &
\end{array}$$

$F(z)=\dfrac{2x^3+11x^2+23x+17}{x^2+3x+2}$ $=2x+5+\dfrac{4x+7}{x^2+3x+2}$

------------------ ------------------------------------

Bu eşitliğin nasıl yazıldığını anlamak için aşağıdaki işlemleri inceleyin.

$$\begin{array}{r|l}
17 & 5 \\ \hline
\mp 15 & 3 \\
\text{------} & \\
2 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
178 & 5 \\ \hline
\mp 15 & 35 \\
\text{------} & \\
28 & \\
25 & \\
\text{--------} & \\
3 &
\end{array}$$

$\dfrac{17}{5}=3+\dfrac{2}{5}$

$\dfrac{178}{5}=35+\dfrac{3}{5}$

------------------------- ---

Örnek 124) $F(z)=\dfrac{6x^4+8x^3+10x^2+23x+6}{x^2+3x+2}$

$$
\begin{array}{l|l}
6x^4+8x^3+10x^2+23x+6 & x^2+3x+2 \\
\hline
\mp 6x^4 \mp 18x^3 \mp 12x^2 & 6x^2-10x+28 \\
\text{-----------------------------------} & \\
\quad -10x^3-2x^2 \quad +23x+6 & \\
\quad \pm 10x^3 \pm 30x^2 \pm 20x & \\
\quad \text{----------------------} & \\
\qquad 28x^2 \quad +43x+6 & \\
\qquad \mp 28x^2 \mp 84x \mp 56 & \\
\qquad \text{------------------------} & \\
\qquad\qquad -41x-50 &
\end{array}
$$

$$\frac{6x^4+8x^3+10x^2+23x+6}{x^2+3x+2}=6x^2-10x+28+\frac{-41x-50}{x^2+3x+2}$$

Örnek 126) $F(z)=\dfrac{10x^2+23x+6}{x^2+3x+2}$

$$
\begin{array}{l|l}
10x^2+23x+6 & x^2+3x+2 \\
\hline
\mp 10x^2 \mp 30x \mp 20 & 10 \\
\text{-----------------------------------} & \\
\quad -7x-14 &
\end{array}
$$

$$\frac{10x^2+23x+6}{x^2+3x+2}=10+\frac{-7x-14}{x^2+3x+2}$$

Kompleks Kökler Hali

$r_1,r_2,..r_m$ köklerinde kompleks kökler varsa bu kompleks kökler eşlenik olarak bulunurlar.

$r_1=a+bi$ ise $a-bi$ de mutlaka koktur. Basit kesirlere ayrıldığında eşlenik köklerin üstündeki sayılar da eşleniktir.

OR344) a) $\dfrac{2x-20}{x^2+4x+20}=\dfrac{1+3i}{x+2-4i}+\dfrac{1-3i}{x+2+4i}$

b) $\dfrac{4x-48}{x^2+6x+34}=\dfrac{2+6i}{x+3-5i}+\dfrac{2-6i}{x+3+5i}$

c) $\dfrac{5x^2+2x-40}{x^3+9x^2+40x+100}=\dfrac{1+3i}{x+2-4i}+\dfrac{1-3i}{x+2+4i}+\dfrac{3}{x+5}$

d) $\dfrac{x^3-6x^2+36x+680}{x^4+3x^3-14x^2-140x-600}=\dfrac{1+3i}{x+2-4i}+\dfrac{1-3i}{x+2+4i}+\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{2}{x-6}$

e) $$\frac{12x^3+6x2^2+268x-80}{x^4+10x^3+78x^2+256x+680}=\frac{1+3i}{x+2-4i}+\frac{1\text{-}3i}{x+2+4i}+\frac{5}{x+3+5i}+\frac{5}{x+3-5i}$$

f) $$\frac{x^5+8x^4\text{-}40x^3-412x^2-1624x+1280}{x^4+3x^3-14x^2-140x-600}=3x-1+\frac{1+3i}{x+2-4i}+\frac{1\text{-}3i}{x+2+4i}+\frac{1}{x+5}+\frac{2}{x-6}$$

Kompleks eşlenik koklu kesirler birleştirilerek

$$\frac{A_1}{(x-r_1)}+\frac{A_2}{(x-r_2)}=\frac{Cx+D}{x^2+Ex+F}$$

seklinde reel katsayılı bir kesir elde edilir.

OR345) $\dfrac{1+3i}{x+2-4i}+\dfrac{1\text{-}3i}{x+2+4i}=?$

a) $$\underset{(x+2+4i)}{\frac{1+3i}{x+2-4i}}+\underset{(x+2-4i)}{\frac{1\text{-}3i}{x+2+4i}}=\frac{(1+3i)(x+2+4i)+(1\text{-}3i)(x+2-4i)}{(x+2-4i)(x+2+4i)}$$

$$=\frac{x+2+4i+3ix+3i_x2+3i_x4i\;+\;x+2-4i-3ix-3i_x2+4i_x3i}{x^2+2x+4ix+2x+2_x2+2_x4i-4ix-2_x4i-16i^2}$$

$$=\frac{2x-20}{x^2+4x+20}$$

b) $$\frac{5x^2+2x-40}{x^3+9x^2+40x+100}=\frac{1+3i}{x+2-4i}+\frac{1\text{-}3i}{x+2+4i}+\frac{3}{x+5}$$

$$=\frac{2x\text{-}20}{x^2+4x+20}+\frac{3}{x+5}$$

c) $$\frac{x^3-6x^2+36x+680}{x^4+3x^3-14x^2-140x-600}=\frac{1+3i}{x+2-4i}+\frac{1\text{-}3i}{x+2+4i}+\frac{1}{x+5}+\frac{2}{x-6}$$

$$=\frac{2x\text{-}20}{x^2+4x+20}+\frac{1}{x+5}+\frac{2}{x-6}$$

d) $$\frac{12x^3+6x2^2+268x-80}{x^4+10x^3+78x^2+256x+680}=\frac{1+3i}{x+2-4i}+\frac{1\text{-}3i}{x+2+4i}+\frac{5}{x+3+5i}+\frac{5}{x+3-5i}$$

$$=\frac{2x\text{-}20}{x^2+4x+20}+\frac{10x+30}{x^2+6x+34}$$

Basit kesirlerdeki Katsayıların Hesabi

$$G(z)=\frac{a_nz^n+a_{n\text{-}1}z^{n\text{-}1}+.....+a_1z+a_0}{z^m+b_{m\text{-}1}z^{m\text{-}1}+.....+b_1z+b_0}=\frac{P(z)}{Q(z)}$$

ifadesinde n<m ise G(z) aşağıdaki şekilde basit kesirlere ayrılır.

$$G(z)=\frac{a_nz^n+a_{n\text{-}1}z^{n\text{-}1}+.....+a_1z+a_0}{z^m+b_{m\text{-}1}z^{m\text{-}1}+.....+b_1z+b_0}=\frac{a_nz^n+a_{n\text{-}1}z^{n\text{-}1}+.....+a_1z+a_0}{(z-z_1)(z-z_2)........(z-z_m)}$$

$$=\frac{A_1}{z-z_1}+\frac{A_2}{z-z_2}+....+\frac{A_{m-1}}{z-z_{m-1}}+\frac{A_m}{z-z_m} \quad \textbf{(A51)}$$

Burada z_1, z_2,... z_m payda polinomunun kökleridir.

A_1,A_2,....A_m, katsayıları 3 şekilde hesaplanabilir.

1) (A51) eşitliğinde ikinci tarafın paydaları eşitlenir ve z nin ayni kuvvetleri birbirine eşitlenerek A_1,A_2,....A_m, katsayıları hesaplanır. **(A52)**

2) A_1,A_2,....A_m, katsayıları aşağıdaki formül ile de hesaplanabilir.

$$A_1=(z-z_1)G(z)\big|_{z=z_1}=\left.\frac{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+.....+a_1z+a_0}{(z-z_2)........(z-z_m)}\right|_{z=z_1}$$

$$A_2=(z-z_2)G(z)\big|_{z=z_2}=\left.\frac{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+.....+a_1z+a_0}{(z-z_1)(z-z_3)........(z-z_m)}\right|_{z=z_2} \quad \textbf{(A53)}$$

....

$$A_m=(z-z_m)G(z)\big|_{z=z_m}=\left.\frac{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+.....+a_1z+a_0}{(z-z_1)(z-z_2)........(z-z_{m-1})}\right|_{z=z_m}$$

3) A_1,A_2,....A_m, katsayıları için bir başka formül

$G(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ olduğuna göre

$$A_1=\left.\frac{P(z)}{Q'(z)}\right|_{z=z_1}, \quad A_2=\left.\frac{P(z)}{Q'(z)}\right|_{z=z_2}, \quad A_m=\left.\frac{P(z)}{Q'(z)}\right|_{z=z_m}, \textbf{(A54)}$$

Payda polinomunun derecesi 2 den büyükse kökler bilgisayar yardımıyla bulunabilir. Kökler biliniyorsa A_1,A_2,...A_m katsayılarının hesabına geçmeden önce çarpanlara ayırma ile ilgili bazı örnekler verelim.

Çarpanlara ayırma sekli örnekleri:

81) $\dfrac{5z-7}{z^2+3z+2}=?$ paydanın kökleri z_1=1, z_2=2

$$\frac{5z-7}{z^2+3z+2}=\frac{5z-7}{(z-1)(z-2)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}$$

82) $\frac{5z-7}{z^2+3z+2}=?$ paydanın kökleri z_1=-2, z_2=-5

$$\frac{7z+23}{z^2+7z+10}=\frac{7z+23}{(z+2)(z+5)}=\frac{A}{z+2}+\frac{B}{z+5}$$

83) $\frac{14z^3+45z^2-88z-199}{z^4+5z^3-7z^2-41z-30}=?$

paydanın kökleri z_1=-2, z_2=-5, z_1=-1, z_2=3,

$$\frac{14z^3+45z^2-88z-199}{z^4+5z^3-7z^2-41z-30}=\frac{A}{z+2}+\frac{B}{z+5}+\frac{C}{z+1}+\frac{D}{z-3}$$

84) $\frac{2z^5+13z^4+15z^3-58z^2-271z-289}{z^4+5z^3-7z^2-41z-30}$=?

paydanın kökleri z_1=-2, z_2=-5, z_1=-1, z_2=3,

$$\frac{2z^5+13z^4+15z^3-58z^2-271z-289}{z^4+5z^3-7z^2-41z-30}=2x+3+\frac{14z^3+45z^2-88z-199}{z^4+5z^3-7z^2-41z-30}$$

$$=2x+3+\frac{A}{z+2}+\frac{B}{z+5}+\frac{C}{z+1}+\frac{D}{z-3}$$

86) $\frac{-z^3-27z^2-152z-205}{z^4+7z^3+9z^2-27z-54}=?$

paydanın kökleri z_1=2, z_2=-3, z_1=-3, z_2=-3,

$$\frac{14z^3+45z^2-88z-199}{z^4+5z^3-7z^2-41z-30}=\frac{A}{z-2}+\frac{B}{z+3}+\frac{C}{(z+3)^2}+\frac{D}{(z+3)^3}$$

87) $\frac{4x^2+33x+65}{x^2+7x+12}=4+\frac{2}{x+3}+\frac{3}{x+4}$

89) $\frac{4x^3+33x^2+88x+77}{x^2+7x+12}=4x+5+\frac{2}{x+3}+\frac{3}{x+4}$

91) $\frac{7x^3+44x^2+21x-154}{x^3+5x^2-2x-24}=7+\frac{2}{x+3}+\frac{3}{x+4}+\frac{5}{x-2}$

92) $\frac{7x^5+43x^4+35x^3-129x^2-168x-190}{x^3+5x^2-2x-24}=7x^2+8x+9+\frac{2}{x+3}+\frac{3}{x+4}+\frac{5}{x-2}$

Katsayıların Hesabi

Örnek Problem 97) $F(z)=\dfrac{5z-7}{z^2-3z+2}$ ifadesini basit kesirlere ayırın.

Çözüm: Metod 1

$z^2-3z+2=0 \rightarrow z_1=1,\; z_2=2,$

$$\frac{5z-7}{z^2-3z+2}=\frac{5z-7}{(z-1)(z-2)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}=\underset{(z-2)}{\frac{A}{z-1}}+\underset{(z-1)}{\frac{B}{z-2}}$$

Paydalar eşitlenirse

$$\frac{5z-7}{(z-1)(z-2)}=\frac{A(z-2)+B(z-1)}{(z-1)(z-2)}=\frac{(A+B)z-2A-B}{(z-1)(z-2)}$$

$5z-7 = (A+B)\,z - 2A - B$

z nin katsayıları eşit olmalı → $A+B=5$,

sabit terim katsayıları eşit olmalı→ $-2A-B=-7$ → $2A+B=7$

ilk denklemden $B=5-A$, ikinci denklemde yerine konursa

$2A+(5-A)=7 \rightarrow 2A-A=7-5 \rightarrow A=2$

$B=5-A=5-2=3$

$$\frac{5x-7}{z^2-3z+2}=\frac{2}{z-1}+\frac{3}{z-2}$$

Metod 2 (A53) formülü

$$\frac{5z-7}{(z-1)(z-2)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}$$

$$A=(z-1)\frac{5z-7}{(z-1)(z-2)}\bigg|_{z=1}=\frac{5z-7}{(z-2)}\bigg|_{z=1}=\frac{5_x1-7}{(1-2)}=\frac{-2}{-1}=2$$

$$B=(z-2)\frac{5z-7}{(z-1)(z-2)}\bigg|_{z=2}=\frac{5z-7}{(z-1)}\bigg|_{z=2}=\frac{5_x2-7}{(2-1)}=\frac{3}{1}=3$$

Metod 3 (A54) formülü

$$\frac{5z-7}{z^2-3z+2}=\frac{P(z)}{Q(z)} \rightarrow \quad Q'(z)=2z-3, \rightarrow \frac{P(z)}{Q'(z)}=\frac{5z-7}{2z-3}$$

$$A=\left.\frac{P(z)}{Q'(z)}\right|_{z=1}=\left.\frac{5z-7}{2z-3}\right|_{z=1}=\frac{5_*1-7}{2_*1-3}=2,$$

$$B=\left.\frac{P(z)}{Q'(z)}\right|_{z=2}=\left.\frac{5z-7}{2z-3}\right|_{z=2}=\frac{5_*2-7}{2_*2-3}=3,$$

Örnek Problem 99) $F(z)=\dfrac{5z+7}{z^2+3z+2}$ ifadesini basit kesirlere ayırın.

Çözüm: Metod 1

$z^2+3z+2=0 \rightarrow z_1=-1,\ z_2=-2,$

$$\frac{5z+7}{z^2+3z+2}=\frac{5z+7}{[z-(-1)][(z-(-2)]}=\frac{5z+7}{(z+1)(z+2)}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+2}$$

Paydalar eşitlenirse

$5z+7 = A(z+2) + B(z+1) = (A+B)\,z + 2A+B$

$A+B=5, \qquad 2A+B=7$

ilk denklemden $B=5-A$ ikinci denklemde yerine konursa

$2A+(5-A)=7 \rightarrow 2A-A=7-5 \rightarrow A=2$

$B=5-A=5-2=3$

$$\frac{5z+7}{z^2+3z+2}=\frac{2}{z+1}+\frac{3}{z+2}$$

Metod 2 (A53) formülü

$$\frac{5z+7}{(z+1)(z+2)}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+2}$$

$$A=(z+1)\left.\frac{5z+7}{(z+1)(z+2)}\right|_{z=-1}=\left.\frac{5z+7}{(z+2)}\right|_{z=-1}=\frac{5(-1)+7}{(-1+2)}=\frac{2}{1}=2$$

$$B=(z+2)\left.\frac{5z+7}{(z+1)(z+2)}\right|_{z=-2}=\left.\frac{5z+7}{(z+1)}\right|_{z=-2}=\frac{5(-2)+7}{(-2+1)}=\frac{-3}{-1}=3$$

Metod 3 (A54) formülü

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{5z+7}{z^2+3z+2} \rightarrow \frac{P(z)}{Q'(z)}=\frac{5z+7}{2z+3}$$

$$A=\left.\frac{P(z)}{Q'(z)}\right|_{z=-1}=\left.\frac{5x+7}{2z+3}\right|_{z=-1}=\frac{5_*(-1)+7}{2_*(-1)+3}=2,$$

$$B=\left.\frac{P(z)}{Q'(z)}\right|_{z=-2}=\left.\frac{5x+7}{2z+3}\right|_{z=-2}=\frac{5_*(-2)+7}{2_*(-2)+3}=3,$$

Örnek Problem 101) $F(z)=\dfrac{4z+8}{z^2+2z+2}$ ifadesini basit kesirlere ayırın.

Çözüm: Metod 1

$z^2+2z+2=0 \rightarrow z_1=\dfrac{-2+\sqrt{2^2-4_x1_x2}}{2}=\dfrac{-2+2i}{2}=-1+i,$

$z_2=\overline{z_1}=\overline{-1+i}=-1-i,$

$$\frac{4z+8}{z^2+2z+2}=\frac{A}{(z-[-1+i])}+\frac{B}{(z-[-1-i])}=\frac{A}{\underset{(z+1+i)}{z+1-i}}+\frac{B}{\underset{(z+1-i)}{z+1+i}}$$

Not: Pay ve payda reel katsayılardan meydana gelmişse payda polinomunun kökleri ve A, B katsayıları eşleniktirler.

Paydalar eşitlenirse

4z+8 = A(z+1+i) + B(z+1-i) = (A+B) z +(1+i)A+(1-i)B

A+B=4

(1+i)A+(1-i)B=8

ilk denklemden B=4-A ikinci denklemde yerine konursa

(1+i)A+(1-i)(4-A)=8

A+Ai+4-4i-A+Ai=8 → 2Ai=8-4+4i → A=(4+4i)/2i

A= -2i+2

B=4-A=4-(-2i+2)=2i+2

$$\frac{4z+8}{z^2+2z+2}=\frac{2-2i}{z+1-i}+\frac{2+2i}{z+1+i}$$

aa=[1 1 ; 1+i 1-i], inv(aa)*[4 8], [p1,p2]=residue([4 8],[1 2 2])

Metod 2 (A53) formülü

$$\frac{4z+8}{(z+1-i)(z+1+i)}=\frac{A}{z+1-i}+\frac{B}{z+1+i}$$

A= $(z+1-i)\left.\frac{4z+8}{(z+1-i)(z+1+i)}\right|_{z=-1+i}=\left.\frac{4z+8}{(z+1+i)}\right|_{z=+1+i}$

$$=\frac{4(-1+i)+8}{(-1+i)+1+i}=\frac{4+4i}{2i}=\frac{(4+4i)(-i)}{(2i)(-i)}=\frac{-4i+4}{2}=-2i+2$$

B= $(z+1+i)\left.\frac{4z+8}{(z+1-i)(z+1+i)}\right|_{z=-1-i}=\left.\frac{4z+8}{(z+1-i)}\right|_{z=-1-i}$

$$=\frac{4(-1-i)+8}{(-1-i)+1-i}=\frac{4-4i}{-2i}=2i+2$$

Not: A ve B eşleniktir. B= $\overline{A}$.

A yi hesapladıktan sonra B= $\overline{A}=\overline{2-2i}$ =2+2i seklinde hesaplanabilir.

Metod 3 (A54) formülü

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{4z+8}{z^2+2z+2} \rightarrow \frac{P(z)}{Q'(z)}=\frac{4z+8}{2z+2}$$

A= $\left.\frac{P(z)}{Q'(z)}\right|_{z=-1+i}=\left.\frac{4z+8}{2z+2}\right|_{z=-1+i}=\frac{4_*(-1+i)+8}{2_*(-1+i)+2}==\frac{4+4i}{2i}=2-2i$

B= $\left.\frac{P(z)}{Q'(z)}\right|_{z=-1-i}=$ 2+2i

Örnek Problem 104) $F(z)=\frac{4z-12}{z^2+6z+25}$ ifadesini basit kesirlere ayırın.

Çözüm: Metod 1

z^2+6z+25=0 → $z_1=\frac{-6+\sqrt{6^2-4_x1_x25}}{2}=\frac{-6+8i}{2}$ =-3+4i,

z_2= $\overline{z_1}$ = $\overline{-3+4i}$ = -3-4i,

$$\frac{4z-12}{z^2+6z+25}=\frac{A}{(z-[-3+4i])}+\frac{B}{(z-[-3-4i])}=\frac{A}{z+3-4i}+\frac{B}{z+3+4i}$$

Paydalar eşitlenirse

4z-12=A(z+3+4i) + B(z+3-4i) = (A+B) z +(3+4i)A+(3-4i)B

A+B=4

(3+4i)A+(3-4i)B =-12

ilk denklemden B=4-A ikinci denklemde yerine konursa

(3+4i)A+(3-4i)(4-A) =-12

3A+4Ai+12-3A-16i+4iA=-12

A(3+4i-3+4i)=-12-12+16i $\rightarrow$ 8iA=-24+16i

A=(-24+16i)/8i=3i+2

B=$\overline{A}=\overline{3i+2}$=2-3i

Metod 2

$$\frac{4z-12}{(z+3-4i)(z+3+4i)}=\frac{A}{z+3-4i}+\frac{B}{z+3+4i}$$

A=$(z+3-4i)\left.\frac{4z-12}{(z+3-4i)(z+3+4i)}\right|_{z=-3+4i}=\left.\frac{4z-12}{(z+3+4i)}\right|_{z=-3+4i}=\frac{4(-3+4i)-12}{(-3+4i)+3+4i}=\frac{-24+16i}{8i}=3i+2$

B=$\overline{A}=\overline{3i+2}$=2-3i

Metod 3

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{4z-12}{z^2+6z+25} \rightarrow \frac{P(z)}{Q'(z)}=\frac{4z-12}{2z+6}$$

A=$\left.\frac{P(z)}{Q'(z)}\right|_{z=-3+4i}=\left.\frac{4z-12}{2z+6}\right|_{z=-3+4i}=\frac{4_*(-3+4i)-12}{2_*(-3+4i)+6}=\frac{-24+16i}{8i}=2+3i$

B=$\left.\frac{P(z)}{Q'(z)}\right|_{z=-3-4i}=\left.\frac{4z-12}{2z+6}\right|_{z=-3-4i}$=2-3i

Örnek Problem 106)F(z)=$\frac{7z^2+6z+59}{z^3+2z^2+z-100}$ ifadesini basit kesirlere ayırın. Not: $z^3+2z^2+z-100=0$ kökleri

$z_1=-3+4i$, $z_2=-3-4i$, $z_3=4$,

Çözüm: Metod 1

$$\frac{7z^2+6z+59}{z^3+2z^2+z-100}=\frac{A}{z+3-4i}+\frac{B}{z+3+4i}+\frac{C}{z-4}$$

$$=\frac{A}{\underset{(z+3+4i)(z-4)}{z+3-4i}}+\frac{B}{\underset{(z+3-4i)(z-4)}{z+3+4i}}+\frac{C}{\underset{(z+3+4i)(z+3-4i)}{z-4}}$$

Paydaları eşitleyelim.

$7z^2+6z+59$=A(z+3+4i)(z-4)+ B(z+3-4i) (z-4)+ C(z+3+4i) (z+3-4i)

İkinci tarafın her terimini tek tek hesaplayalım.

A(z+3+4i)(z-4)=A(z^2-4z+3z-12+4iz-16i)=Az^2+A(-1+4i)z-12A-16Ai

$B(z+3-4i)(z-4)=B(z^2-4z+3z-12-4iz+16i)=Bz^2+B(-1-4i)z-12A+16Bi$

$C(z+3+4i)\ (z+3-4i)=C(z+3)^2+4^2=Cz^2+C6z+9C+16C$

Toplam terim

$(A+B+C)z^2+[\ A(-1+4i)+B(-1-4i)+6C]z-12A-16Ai-12B-16Bi+9C+16C$

$=7z^2+6z+59$

$A+B+C=7$

$A(-1+4i)+B(-1-4i)+6C=6$

$(-12-16i)A+(-12+16i)B+25C=59$

Üç bilinmeyenli üç denklemi matris formunda yazalım ve Gaus eliminasyon metodu ile çözelim.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1+4i & -1-4i & 6 \\ -12-16i & -12+16i & 25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 59 \end{bmatrix}$$

Genişletilmiş matrisi oluşturalım.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ -1+4i & -1-4i & 6 & | & 6 \\ -12-16i & -12+16i & 25 & | & 59 \end{bmatrix}$$

ilk satiri $-\dfrac{-1+4i}{1}$=1-4i ile çarpıp ikinci satıra ekle

ilk satırı $-\dfrac{-12-16i}{1}$=12+16i ile çarpıp 3. satıra ekle

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ -1+4i+(1-4i) & -1-4i+(1-4i) & 6+(1-4i) & 6+7(1-4i) \\ -12-16i+12+16i & -12+16i+12+16i & 25+12+16i & 59+7(12+16i) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -8i & 7-4i & 13-28i \\ 0 & 32i & 37+16i & 143+112i \end{bmatrix}$$

ikinci satırı $-\dfrac{32i}{-8i}=4$ ile çarp üçüncü satıra ekle

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -8i & 7-4i & 13-28i \\ 0 & 32i+4(-8i) & 37+16i+4(7-4i) & 143+112i+4(13-28i) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -8i & 7-4i & 13-28i \\ 0 & 0 & 65 & 195 \end{bmatrix}$$

Denklemleri Matris formunda yazalım.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8i & 7-4i \\ 0 & 0 & 65 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ 13-28i \\ 195 \end{bmatrix}$$

Son satırdan basa doğru denklemleri çöz.

$65C=195 \rightarrow C=195/65=3$

ikinci satir

$-8iB+(7-4i)C=13-28i \rightarrow -8iB+(7-4i)3=13-28i$

$-8iB=13-28i-21+12i$

$-8iB=-8-16i \rightarrow B=(-8-16i)/(-8i)=-i+2$

Birinci satir

A+B+C=7 $\rightarrow$ A+(2-i)+3=7 $\rightarrow$ A=7-2-3+i =2+i

```
aa=[1 1 1; -1+4i  -1-4i  6; -12-16i  -12+16i 25]; bb=[7 6 59]'; inv(aa)*bb
```

Metod 2 (A53) formülü

$$\frac{7z^2+6z+59}{z^3+2z^2+z-100}=\frac{7z^2+6z+59}{(z+3-4i)(z+3+4i)(z-4)}=\frac{A}{z+3-4i}+\frac{B}{z+3+4i}+\frac{C}{z-4}$$

$$A=(z+3-4i)\frac{7z^2+6z+59}{(z+3-4i)(z+3+4i)(z-4)}\bigg|_{z=-3+4i}=\frac{7z^2+6z+59}{(z+3+4i)(z-4)}\bigg|_{z=-3+4i}=\frac{7z^2+6z+59}{z^2+(-1+4i)z-12-16i}\bigg|_{z=-3+4i}$$

$$=\frac{7(-3+4i)^2+6(-3+4i)+59}{(-3+4i)^2+(-1+4i)(-3+4i)-12-16i}$$

(-3+4i)^2=-7-24i, (-1+4i)(-3+4i)=-13-16i

$$=\frac{7(-7-24i)+6(-3+4i)+59}{(-7-24i)-13-16i-12-16i}=\frac{-8-144i}{-32-56i}$$

$$=\frac{-8-144i}{-32-56i}\,\frac{-32+56i}{-32+56i}=2+i$$

$B=\overline{A}=\overline{2+i}=2-i$

$$C=(z-4)\frac{7z^2+6z+59}{(z+3-4i)(z+3+4i)(z-4)}\bigg|_{z=-4}$$

$$=\frac{7z^2+6z+59}{(z+3-4i)(z+3+4i)}\bigg|_{z=-4}=\frac{7(-4)^2+6(-4)+59}{(-4+3-4i)(-4+3+4i)}=3$$

Metod 3 (A54) formülü

$$\frac{7z^2+6z+59}{z^3+2z^2+z-100}$$

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{7z^2+6z+59}{z^3+2z^2+z-100}\quad\rightarrow\quad\frac{P(z)}{Q'(z)}=\frac{7z^2+6z+59}{3z^2+4z+1}$$

$$A=\frac{P(z)}{Q'(z)}\bigg|_{z=-3+4i}=\frac{7z^2+6z+59}{3z^2+4z+1}\bigg|_{z=-3+4i}=2+i$$

$$B=\frac{P(z)}{Q'(z)}\bigg|_{z=-3-4i}=\frac{7z^2+6z+59}{3z^2+4z+1}\bigg|_{z=-3-4i}=2-i$$

$$C=\frac{P(z)}{Q'(z)}\bigg|_{z=4}=\frac{7z^2+6z+59}{3z^2+4z+1}\bigg|_{z=4}=\frac{7(4)^2+6(4)+59}{3(4)^2+4(4)+1}=\frac{195}{65}=3$$