Kesirli Polinomların Basit Kesirlere Ayrılması
(Katlı Kökler Hali)

$$G(z)=\frac{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+.....+a_1 z+a_0}{z^m+b_{m-1}z^{m-1}+.....+b_1 z+b_0}=\frac{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+.....+a_1 z+a_0}{(z-z_1)(z-z_2)........(z-z_m)}$$

$$=\frac{A_1}{z-z_1}+\frac{A_2}{z-z_2}+....+\frac{A_{m-1}}{z-z_{m-1}}+\frac{A_m}{z-z_m} \quad \textbf{(A51)}$$

$z_1,z_2,....z_m$, kökleri farklı ise $A_1,A_2,....A_m$, katsayılarının hesabi önceki bolümde verilmişti.

Katlı Kökler Hali

Kesirli polinomun (A51) seklinde basit kesirlere ayrılması formülü $z_1, z_2,... z_m$ köklerin hepsi farklı olduğu durum için geçerlidir. Eğer z_i kökü katlı ise o zaman formül

$$G(z)=\frac{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+.....+a_1 z+a_0}{z^m+b_{m-1}z^{m-1}+.....+b_1 z+b_0}=\frac{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+.....+a_1 z+a_0}{(z-z_1)(z-z_2)........(z-z_i)^k}$$

$$=\frac{A_1}{z-z_1}+\frac{A_2}{z-z_2}+....+\frac{A_{i+1}}{z-z_i}+\frac{A_{i+2}}{(z-z_i)^2}+...+\frac{A_{i+k}}{(z-z_i)^k} \quad \textbf{(A60)}$$

şeklinde olur. Birden fazla katlı kök varsa formül benzer şekilde genişletilir. z_i kökü k katlı, z_n kökü m katlı olsun.

Daha anlaşılır bicimde olması için katlı kökleri $C_1, C_2,... C_k$, $D_1, D_2,... D_m$, ile gösterelim.

$$G(z)=\frac{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+.....+a_1 z+a_0}{(z-z_1)(z-z_2)........(z-z_i)^k.....(z-z_n)^m}$$

$$=\frac{A_1}{z-z_1}+\frac{A_2}{z-z_2}+....+\frac{C_1}{z-z_i}+\frac{C_2}{(z-z_i)^2}+...+\frac{C_k}{(z-z_i)^k}$$

$$...+\frac{D_1}{z-z_n}+\frac{D_2}{(z-z_n)^2}+...+\frac{D_m}{(z-z_n)^m}$$

$A_1,A_2,....A_m$, $C_1,C_2,....C_k$, $D_1,D_2,....D_m$, katsayılarının hesabı:

Metod 1: Paydaları eşitleyerek $A_1,A_2,....A_m$, $C_1,C_2,....C_k$, $D_1,D_2,....D_m$ katsayılarının hesabı kökler ister katlı olsun, ister farklı kökler olsun, her durum için geçerlidir.

Metod 2: Köklerin bazıları tek katlı (bütün kökler farklı) bazıları ise çok katlıdır. Tek katlı kökler (farklı kökler) önceki bolümde anlatıldığı gibi **(A53)** bağıntısı kullanılarak hesaplanır. çok katlı köklere ait bağıntılar su şekilde verilir.

$$C_k = (z - z_i)^k G(z)\Big|_{z=z_i} \,, \qquad \textbf{(A63)}$$

$$C_p = \frac{1}{(k-p)!}\frac{d^{k-p}}{dz^{k-p}}\left\{(z - z_i)^k G(z)\right\} \qquad p=1,2...k \qquad \textbf{(A66)}$$

(A63) bağıntısı (A66) bağıntısının özel halidir (k=p) hali

Metod 3: Tek katlı köklerin hesabı için bir başka formül

$G(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ olduğuna göre $\quad A_j=\dfrac{P(z)}{Q'(z)}\Big|_{z=z_j} \qquad$ **(A54)**

Bu formül çok katlı kökler için geçerli değildir. Sadece tek katlı kökler için kullanılabilir.

Örnek Problem 111) $F(z)=\dfrac{4z+13}{z^2+4z+4}$ ifadesini basit kesirlere ayırın.

Çözüm: Metod 1

$$\frac{4z+13}{z^2+4z+4} = \frac{4z+13}{(z+2)^2} == \frac{A}{z+2} + \frac{B}{(z+2)^2}$$

$$= \underset{(z+2)}{\frac{A}{z+2}} + \underset{(1)}{\frac{B}{(z+2)^2}} = \frac{A(z+2)+B}{(z+2)^2} = \frac{Az+(2A+B)}{(z+2)^2}$$

4z+13=Az+(2A+B)

4=A, 13=2A+B → B=5

Metod 2

Metod 2 **(A63)** formülü) ile B katsayısını hesaplarız

$$B=(z+2)^2\,\frac{4z+13}{(z+2)^2}\bigg|_{z=-2} = \frac{4z+13}{1}\bigg|_{z=-2} = 4(-2)+13 = 5$$

A katsayısını **A66** formülüne göre hesaplayabiliriz.

$$A=\frac{d}{dz}\left\{(z+2)^2\,\frac{4z+13}{(z+2)^2}\bigg|\right\}_{z=-2} = \frac{d}{dz}\left\{\frac{4z+13}{1}\right\}_{z=-2} = 4\,|_{z=-2} = 4$$

Örnek Problem 113) F(z)=$\dfrac{7z^2+29z+25}{z^3+5z^2+8z+4}$ ifadesini basit kesirlere ayırın. Not:

$z^3+5z^2+8z+4=0$ kökleri

z_1=-2, z_2=-2, z_2=-1,

Çözüm: Metod 1

$$\frac{7z^2+29z+25}{z^3+5z^2+8z+4}=\frac{7z^2+29z+25}{(z+1)(z+2)^2}==\frac{A}{z+2}+\frac{B}{(z+2)^2}+\frac{C}{z+1}$$

$$=\underset{(z+2)(z+1)}{\frac{A}{z+2}}+\underset{(z+1)}{\frac{B}{(z+2)^2}}+\underset{(z+2)^2}{\frac{C}{z+1}}=\frac{A(z+2)(z+1)+B(z+1)+C(z+2)^2}{(z+2)^2(z+1)}$$

$$=\frac{A(z^2+3z+2)+B(z+1)+C(z^2+4z+4)}{(z+2)^2(z+1)}=\frac{(A+C)z^2+(3A+B+4C)z+2A+B+4C}{(z+2)^2(z+1)}$$

A+C=7, 3A+B+4C=29, 2A+B+4C=25

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\ B\\ C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\ 29\\ 22\end{bmatrix}$$

A=4, B=5, C=3

Metod 2

(A53) ile C katsayısını ile hesaplarız.

$$C=(z+1)\frac{7z^2+29z+25}{(z+2)^2(z+1)}\bigg|_{z=-1}=\frac{7z^2+29z+25}{(z+2)^2}\bigg|_{z=-1}$$

$$=\frac{7(-1)^2+29(-1)+25}{(-1+2)^2}=3$$

(A63) ile B katsayısını ile hesaplarız.

$$B=(z+2)^2\frac{7z^2+29z+25}{(z+2)^2(z+1)}\bigg|_{z=-2}=\frac{7z^2+29z+25}{(z+1)}\bigg|_{z=-2}$$

$$=\frac{7(-2)^2+29(-2)+25}{(-2+1)}=5$$

A katsayısını **(A66)** ile hesaplarız

$$A=\frac{d}{dz}\left\{(z+2)^2\frac{7z^2+29z+25}{(z+2)^2(z+1)}\right\}_{z=-2}$$

$$=\frac{d}{dz}\left\{\frac{7z^2+29z+25}{(z+1)}\right\}_{z=-2}=\left.\frac{(14z+29)(z+1)-1\ (7z^2+29z+25)}{(z+1)^2}\right|_{z=-2}$$

$$\frac{[14(-2)+29]\ [(-2)+1)]-[7(-2)^2+29(-2)+25)}{(-2+1)^2}=4$$

Metod 3

Katlı köklerde metod 3 geçerli değildir. Metod 3 ile sadece katsız kök olan C yi hesaplayabiliriz.

$$C=\left.\frac{P(z)}{Q'(z)}\right|_{z=-1}$$

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{7z^2+29z+25}{z^3+5z^2+8z+4},\quad\rightarrow\quad\frac{P(z)}{Q'(z)}=\frac{7z^2+29z+25}{3z^2+10z+8}$$

$$C=\left.\frac{P(z)}{Q'(z)}\right|_{z=-1}=\left.\frac{7z^2+29z+25}{3z^2+10z+8}\right|_{z=-1}=\frac{7(-1)^2+29(-1)+25}{3(-1)^2+10(-1)+8}=3$$

Örnek Problem 115) $F(z)=\frac{4z^2+21z+32}{z^3+6z^2+12z+8}$ ifadesini basit kesirlere ayırın. Not: $z^3+6z^2+12z+8=0$ kökleri

$z_1=-2$, $z_2=-2$, $z_3=-2$,

Çözüm: Metod 1

$$\frac{4z^2+21z+32}{z^3+6z^2+12z+8}=\frac{4z^2+21z+32}{(z+2)^3}==\frac{A}{z+2}+\frac{B}{(z+2)^2}+\frac{C}{(z+2)^3}$$

$$=\underset{(z+2)^2}{\frac{A}{z+2}}+\underset{(z+2)}{\frac{B}{(z+2)^2}}+\underset{(1)}{\frac{C}{(z+2)^3}}=\frac{A(z+2)^2+B(z+2)+C}{(z+2)^3}$$

$A(z^2+4z+4)+B(z+2)+C=Az^2+(4A+B)z+4A+2B+C$

$4=A$

$4A+B=21\ \rightarrow B=21-4A=5$

$4A+2B+C=32\ \rightarrow C=32-4A-2B=6$

Metod 2

Metod 2 **(A63)** ile C yi ile hesaplarız.

$$C=(z+2)^3\,\frac{4z^2+21z+32}{(z+2)^3}\Bigg|_{z=-2}=(4z^2+21z+32)\,|_{z=-2}$$

$$=4(-2)^2+21(-2)+32 \;=\; 6$$

(A66) ile A ve B yi hesaplarız.

$$B=\frac{d}{dz}\left\{(z+2)^3\,\frac{4z^2+21z+32}{(z+2)^3}\Bigg|\right\}_{z=-2}=\frac{d}{dz}\left\{4z^2+21z+32\Big|\right\}_{z=-2}$$

$$=(8z+21)\,|_{z=-2}=8(-2)+21=5$$

$$A=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left\{(z+2)^3\,\frac{4z^2+21z+32}{(z+2)^3}\Bigg|\right\}_{z=-2}=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left\{4z^2+21z+32\Big|\right\}_{z=-2}$$

$$=\frac{1}{2}8\Big|_{z=-2}=4$$

Örnek Problem 117) $F(z)=\dfrac{3z^3+22z^2+57z+56}{z^4+8z^3+24z^2+32z+16}$ ifadesini basit kesirlere ayırın. Not: $z^4+8z^3+24z^2+32z+16=0$ kökleri

$z_1=-2$, $z_2=-2$, $z_3=-2$, $z_4=-2$,

Çözüm:

$$\frac{3z^3+22z^2+57z+56}{z^4+8z^3+24z^2+32z+16}=\frac{3z^3+22z^2+57z+56}{(z+2)^4}$$

$$==\frac{A}{z+2}+\frac{B}{(z+2)^2}+\frac{C}{(z+2)^3}+\frac{D}{(z+2)^4}$$

Metod 2

Metod 2 (A63) ile D yi ile hesaplarız.

$$D=(z+2)^4\,\frac{3z^3+22z^2+57z+56}{(z+2)^4}\Bigg|_{z=-2}=(3z^3+22z^2+57z+56)\,|_{z=-2}$$

$$=3(-2)^3+22(-2)^2+57(-2)+56 \;=\; 6$$

(A66) ile A ve B, C yi hesaplarız.

$$C=\frac{d}{dz}\left\{(z+2)^4\,\frac{3z^3+22z^2+57z+56}{(z+2)^4}\Bigg|\right\}_{z=-2}=\frac{d}{dz}\left\{3z^3+22z^2+57z+56\Big|\right\}_{z=-2}$$

$= (9z^2 + 44z+57)|_{z=-2} = 5$

$$B = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left\{(z+2)^4 \left.\frac{3z^3+22z^2+57z+56}{(z+2)^4}\right|\right\}_{z=-2}$$

$$= \frac{d^2}{dz^2}\left\{3z^3+22z^2+57z+56\right|\Big\}_{z=-2} = \frac{1}{2}(18z+44)|_{z=-2} = 4$$

$$A = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{dz^3}\left\{(z+2)^4 \left.\frac{3z^3+22z^2+57z+56}{(z+2)^4}\right|\right\}_{z=-2}$$

$$= \frac{1}{6}\frac{d^3}{dz^3}\left\{3z^3+22z^2+57z+56\right|\Big\}_{z=-2} = \frac{1}{6}18|_{z=-2} = 3$$

Örnek Problem 121) $F(z)=\frac{4z^4 - z^3 - 52z^2 - 23z + 40}{z^5 - z^4 - 13z^3 + z^2 + 48z + 36}$ ifadesini basit kesirlere ayırın.

Not: $z^5-z^4-13z^3+z^2+48z+36=0$ kökleri

$z_1=-2$, $z_2=-2$, $z_3=-1$, $z_4=3$, $z_5=3$,

Çözüm: $\frac{4z^4 - z^3 - 52z^2 - 23z + 40}{z^5 - z^4 - 13z^3 + z^2 + 48z + 36} = \frac{4z^4 - z^3 - 52z^2 - 23z + 40}{(z+2)^2(z+1)(z-3)^2}$

$$= \frac{A}{z+2} + \frac{B}{(z+2)^2} + \frac{C}{z+1} + \frac{D}{z-3} + \frac{E}{(z-3)^2}$$

Metod 2

(A53) ile C yi ile hesaplarız.

$$C = (z+1)\left.\frac{4z^4 - z^3 - 52z^2 - 23z + 40}{(z+1)(z+2)^2(z-3)^2}\right|_{z=-1} = \left.\frac{4z^4 - z^3 - 52z^2 - 23z + 40}{(z+2)^2(z-3)^2}\right|_{z=-1} = 1$$

(A63) ile B ve E yi ile hesaplarız.

$$B = (z+2)^2\left.\frac{4z^4 - z^3 - 52z^2 - 23z + 40}{(z+2)^2(z+1)(z-3)^2}\right|_{z=-2} = \left.\frac{4z^4 - z^3 - 52z^2 - 23z + 40}{(z+1)(z-3)^2}\right|_{z=-2} = 2$$

$$E = (z-3)^2\left.\frac{4z^4 - z^3 - 52z^2 - 23z + 40}{(z+2)^2(z+1)(z-3)^2}\right|_{z=3} = \left.\frac{4z^4 - z^3 - 52z^2 - 23z + 40}{(z+1)(z+2)^2}\right|_{z=3} = -2$$

```
Polyval([4 -1 -52 -23 40],x); d2=polyval(conv([1 2], [1 2]),x);d3=polyval(conv([1 -3], [1 -3]),x); d1=polyval([1 1],x);
```

(A66) ile A ve D yi hesaplarız.

$$\mathrm{A}=\frac{d}{dz}\left\{(z+2)^2\,\frac{4z^4-z^3-52z^2-23z+40}{(z+2)^2(z+1)(z-3)^2}\right\}_{z=-2}$$

$$=\frac{d}{dz}\left\{\frac{4z^4-z^3-52z^2-23z+40}{(z+1)(z-3)^2}\right\}_{z=-2}=\frac{d}{dz}\left\{\frac{4z^4-z^3-52z^2-23z+40}{z^3-5z^2+3z+9}\right\}_{z=-2}$$

$$=\left.\frac{(16z^3-3z^2-104z-23)(z^3-5z^2+3z+9)-(4z^4-z^3-52z^2-23z+40)(3z^2-10z+3)}{(z^3-5z^2+3z+9)^2}\right|_{z=-2}==\frac{-50\mathrm{x}35-45\mathrm{x}(-25)}{(-25)^{\wedge}2}=-1$$

$$\mathrm{D}=\frac{d}{dz}\left\{(z-3)^2\,\frac{4z^4-z^3-52z^2-23z+40}{(z+2)^2(z+1)(z-3)^2}\right\}_{z=3}$$

$$=\frac{d}{dz}\left\{\frac{4z^4-z^3-52z^2-23z+40}{(z+1)(z+2)^2}\right\}_{z=3}=\frac{d}{dz}\left\{\frac{4z^4-z^3-52z^2-23z+40}{z^3+5z^2+8z+4}\right\}_{z=3}$$

$$=\left.\frac{(16z^3-3z^2-104z-23)(z^3+5z^2+8z+4)-(4z^4-z^3-52z^2-23z+40)(3z^2+10z+8)}{(z^3+5z^2+8z+4)^2}\right|_{z=3}==\frac{-200\mathrm{x}65-70\mathrm{x}100}{100^2}=-2$$

```
p1=[4 -1 -52 -23 40]; p1t=[16 -3 -104 -23]; d1=[1 5 8 4]; d1t=[3 10 8]; a1=polyval(p1,x); at= polyval(p1t,x);  b1=polyval(d1,x);  bt=polyval(d1t,x); nn=(a1*bt-b1*at)/b1^2; yzz(a1,bt,at,b1,a1*bt,b1*at,a1*bt b1*at,nn);
x=-2; p1=[4 -1 -52 -23 40]; p1t=[16 -3 -104 -23]; d1=[1 -5 3 9]; d1t=[3 -10 3]; a1=polyval(p1,x); at= polyval(p1t,x); b1=polyval(d1,x);  bt=polyval(d1t,x); nn=(a1*bt-b1*at)/b1^2; yzz(a1,bt,at,b1,a1*bt,b1*at,a1*bt; b1*at,nn);
```

Örnek Problem 131) F(z)=$\frac{z^3+2z^2-4z+10}{z^4-4z^3+24z^2-40z+100}$ ifadesini basit kesirlere ayırın.

Not: $z^4-4z^3+24z^2-40z+100=0$ kökleri

$z_1=1+3i$, $z_2=1+3i$, $z_3=1-3i$, $z_4=1-3i$

Çözüm: $\frac{z^3+2z^2-4z+10}{z^4-4z^3+24z^2-40z+100}=\frac{z^3+2z^2-4z+10}{(z-1-3i)^2(z-1+3i)^2}$

$$=\frac{z^3+2z^2-4z+10}{(z^2+(-2-6i)z-8+6i)\;(z^2+(-2+6i)z-8-6i)}$$

$$=\frac{A}{(z-1-3i)}+\frac{B}{(z-1-3i)^2}+\frac{C}{(z-1+3i)}+\frac{D}{(z-1+3i)^2}$$

Metod 2

(A63) ile B ve D yi ile hesaplarız. B veD birbirinin eşleniğidir. Dolayısıyla sadece B yi hesaplamak yeterlidir.

$$B=(z-1-3i)^2\,\frac{z^3+2z^2-4z+10}{(z-1-3i)^2(z-1+3i)^2}\Bigg|_{z=1+3i}$$

$$B=\frac{z^3+2z^2-4z+10}{(z-1+3i)^2}\Bigg|_{z=1+3i}=\frac{(1+3i)^3+2(1+3i)^2-4(1+3i)+10}{(6i)^2}$$

$$=\frac{-36-18i}{-36}=1+0.5i$$

```
X=1+3i; a=polyval([1 2 -4 10],x);  b=polyval([ 1  -1+3i]);  a/b^2   z=1+3i;  a=z^3+2*z^2-4*z+10; b= z^2;    yzz(a,b,a/b
```

$$D=\overline{B}=\overline{1+0.5i}=1\text{-}0.5i$$

(A66) ile A ve C yi hesaplarız. A ve C birbirinin eşleniğidir. Dolayısıyla sadece A yi hesaplamak yeterlidir.

$$A=\frac{d}{dz}\left\{((z-1-3i)^2\,\frac{z^3+2z^2-4z+10}{(z-1-3i)^2(z-1+3i)^2}\right\}_{z=1+3i}$$

$$A=\frac{d}{dz}\left\{\frac{z^3+2z^2-4z+10}{(z-1+3i)^2}\right\}_{z=1+3i}==\frac{d}{dz}\left\{\frac{z^3+2z^2-4z+10}{(z^2+(-2+6i)z-8-6i)}\right\}_{z=1+3i}$$

$$=\frac{(3z^2+4z-4)(z^2+(-2+6i)z-8-6i)\text{ - }(z^3+2z^2-4z+10)(2z+(-2+6i)}{(z^2+(-2+6i)z-8-6i)^2}\Bigg|_{z=1+3i}$$

$$\frac{216\text{-}432i\text{-}(864\text{-}1080i)}{(-36)^2}=\frac{648\text{-}648i}{1296}=-0.5+0.5i$$

$$C=\overline{A}=\overline{-0.5+0.5i}=-0.5\text{-}0.5i$$

```
x=1+3i; a=polyval([1 2 -4 10],x);  at=polyval([ 3  4  -4],x); c=polyval([1  -2+6i  -8-6i ],x);  ct=polyval([ 2  -2+6i],x); x=1+3i; a=polyval([1 2 -4 10],x);  b=polyval([ 1  -1+3i]);  (a*ct – at*c) /c^2
```