

Limit

Normal bir fonksiyonda, fonksiyonun $x=a$ noktasındaki limiti, fonksiyonun $x=a$ daki değeridir.

a) $f(x)=x^2+3$, fonksiyonun $x=2$ deki limiti

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 6 = 2^2 + 6 = 10$$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 7}{x - 1}$, fonksiyonunun $x=3$ deki limiti

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 7}{x - 1} = \frac{3^2 + 7}{3 - 1} = 8$$

c) $f(x) = \frac{x^2 + 7}{x - 1}$, fonksiyonunun $x=1$ deki değeri sonsuzdur.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 7}{x - 1} = \frac{1^2 + 7}{1 - 1} = \infty$$

Bu fonksiyonun $x=1$ de limiti yoktur.

Bu gibi durumlar için, bazı matematikçiler "limiti sonsuzdur" deyimini kullanmaktadırlar. Sonsuz reel bir sayı değildir. Bu yüzden çoğu matematikçiler "limiti yoktur" ibaresini kullanırlar.

limit sabit bir sayı olursa, fonksiyonun limiti vardır.

"Normal bir fonksiyon" deyimini matematik olarak "süreksizlik içermeyen" anlamındadır.

$f(x)=x^2+3x+2$, $f(x)=x^3-8x^2+20$, ... şeklindeki bütün polinomlarda $-\infty < x < \infty$ için süreksizlik noktası yoktur. Bu tür polinomlarda her x değerine karşılık bir $f(x)$ vardır, her x değerine karşılık fonksiyonun limiti vardır.

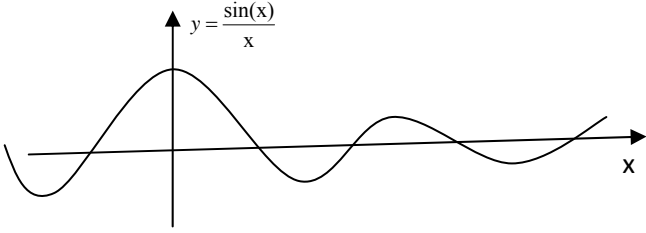
d) $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$ fonksiyonu $x=0$, $x=\pi$, $x=2\pi$, $x=3\pi$, noktalarında süreksizdir. Bu noktalarda fonksiyonun

değeri sonsuzdur, fonksiyonun limiti tanımsızdır, limiti yoktur.

OR611) $\sin(x)/x$ fonksiyonunun $x=0$ civarında değerini hesaplayın.

$\sin(x)/x$ fonksiyonunu ele alalım. $x=0$ için $0/0$ belirsizliğini alır. Ancak x sıfırdan ξ kadar uzaklaşsa $\sin(x)/x$ değeri bire yakın bir değer alır. Burada ξ çok küçük bir sayı anlamında kullanılır.

X (radyan)	Sin(x) (x:radyan)	Sin(x)/x
-1.50	-0.997494986604054	0.6649966577
-1.00	-0.841470984807897	0.8414709848
-0.50	-0.479425538604203	0.9588510772
0.10	0.099833416646828	0.9983341664
-0.05	-0.049979169270678	0.9995833854
-0.00100	-0.000999998333333	0.9999983333
-0.00010	-0.000099999998333	0.9999999833
0	0	0/0 belirsiz
0.00010	0.0000999999998333	0.9999999833
-0.00100	-0.000999998333333	0.9999983333
0.05	0.049979169270678	0.9995833854
0.10	0.099833416646828	0.9983341664
0.50	0.479425538604203	0.9588510772
1.00	0.841470984807897	0.8414709848
1.50	0.997494986604054	0.6649966577



Burada en mühim nokta x negatif değerlerden sifira yaklaşıldığında $\sin(x)/x=1$ olduğu gibi, x pozitif değerlerden sifira yaklaşıldığında da $\sin(x)/x$ 1 olmaktadır. Dolayısıyla $\sin(x)/x$ fonksiyonunun $x=0$ için limiti vardır ve bu değer 1 e eşittir.

OR611) $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{(x-1)}$ fonksiyonunun $x=1$ civarında değerini hesaplayın.

$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{(x-1)}$ fonksiyonunun $x=1$ civarındaki değerleri tabloda verilmiştir. Burada görüldüğü gibi $x=1$ için $f(x)$ $0/0$ olmakta fakat x 1 den çok az uzaklaşsa $f(x)$ in değeri -2 olmaktadır.

x	$x^3 - 2x^2 - x + 2$	$x-1$	$\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{(x-1)}$
0.8	0.432	-0.2	-2.16
0.9	0.209	-0.1	-2.09
0.95	0.102375	-0.05	-2.0475
0.99	0.020099	-0.01	-2.0099
0.99	0.020099	-0.01	-2.0099
0.999	0.002001	-0.001	-2.001
0.9999	0.0002	-0.0001	-2.0001
0.99999	0.000002	-0.00001	-2.00000
1	0	0	0/0 belirsiz
1.00001	-0.00002	0.00001	-2.0000
1.0001	-0.0002	0.0001	-1.9999
1.001	-0.002	0.001	-1.999
1.01	-0.0199	0.01	-1.9899
1.1	-0.189	0.1	-1.89
1.2	-0.352	0.2	-1.76

Burada da $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{(x-1)}$ fonksiyonunun $x=1$ için limiti vardır ve bu değer -2 ye eşittir.

OR611) $f(x) = \frac{1}{(x-1)}$ fonksiyonunun $x=1$ civarında değerini hesaplayın.

x	$x-1$	$\frac{1}{(x-1)}$
0.8	-0.2	-5
0.9	-0.1	-10
0.95	-0.05	-20
0.99	-0.01	-100
0.99	-0.01	-100
0.999	-0.001	-1000
0.9999	-0.0001	-10000
0.99999	-0.00001	-100000
1	0	$-\infty$

1^+	0^+	$+\infty$
1.00001	0.00001	100000
1.0001	0.0001	10000
1.001	0.001	1000
1.01	0.01	100
1.1	0.1	10
1.2	0.2	5

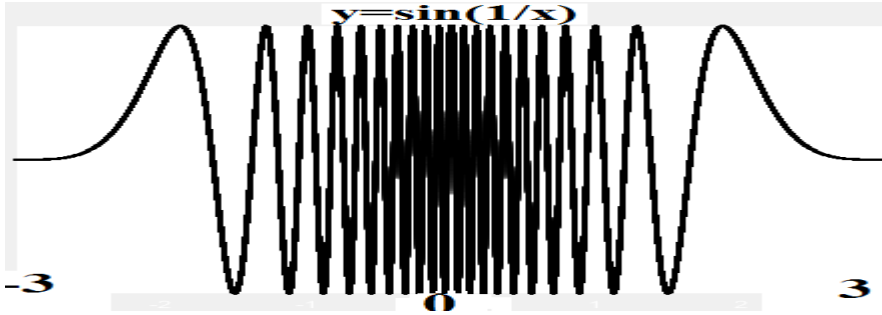
$x=1$ de fonksiyonun değeri sonsuz olduğu için fonksiyonun $x=1$ de bir limiti yoktur.

$x=a$ için limiti sonsuz olan bir fonksiyonun $x=a$ için limiti tanımlı değildir. "Limiti sonsuzdur" demek limitinin olmadığı, limitinin tanımsız olduğu anlamına gelir.

Limitin olmamasının çeşitli sebepleri vardır. Bir fonksiyonun $x=a$ da değeri sonsuz olmadığı halde limiti olmayabilir.

OR613) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ fonksiyonunun $x=0$ civarında değerini hesaplayın.

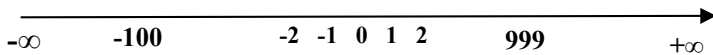
x	-0.00004	-0.00003	-0.00002	-0.00001	0	0.00001	0.00002	0.00003	0.00004
$\frac{1}{x}$	-25000	-33333	-50000	-100000	∞	100000	50000	33333	25000
$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	-0.713	0.86	-0.999	0.035	?	-0.035	0.999	-0.86	0.713



$x \rightarrow 0$ için $\sin(1/x)$ sabit bir değere yaklaşmıyor. Dolayısıyla $\sin(1/x)$ fonksiyonunun $x=0$ da limiti yoktur.

Sağdan limit, soldan limit kavramı

sayı eksenini soldan sağa doğru artar.



Bir fonksiyonda $x=a$ noktasının soldan limiti demek; $x=a$ dan küçük sayılardan $x=a$ ya doğru artarak gelirken fonksiyonun aldığı değerler demektir. Keza $x=a$ noktasının sağdan limiti demek $x=a$ dan büyük sayılardan $x=a$ ya doğru azalarak gelirken fonksiyonun aldığı değerler demektir.

Mesela $x=1$ noktasına 0.91 0.92 ... 0.98 0.99 1 şeklinde gelinirse bu soldan limit değerinin hesaplanması olur. $x=1$ noktasına 1.09 1.08 1.07 1.02 1.01 1 şeklinde gelinirse bu sağdan limit değerinin hesaplanması olur.

Yukarıdaki $f(x) = \frac{1}{x-1}$ örneğinde $x=1$ noktasına soldan gelirse fonksiyon $-\infty$ olmaktadır.

x	0.99990	0.99991	0.99992	...	0.9999999	1^-
---	---------	---------	---------	-----	-----------	-------

$\frac{1}{x-1}$	-10000	-11111	-12500	...	-10000000	$-\infty$
-----------------	--------	--------	--------	-----	-----------	-----------

Aynı fonksiyonda $x=1$ noktasına sağdan gelirse fonksiyon $+\infty$ olmaktadır.

x	1.00009	1.00008	1.00007	...	1.000001	1^+
$\frac{1}{x-1}$	11111.1	12500	14285.7	...	1000000	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty,$$

Burada 1^- : $x=1$ noktasına sol taraftan,

1^+ : $x=1$ noktasına sağ taraftan

gelindiği anlamına gelir.

$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ fonksiyonunda $x=1$ noktasına soldan ve sağdan limitleri hesaplamaya çalışalım.

x	0.9999	0.99991	0.99992	...	0.9999999	1^-
$\frac{1}{x^2-1}$	10^8	1.23×10^8	1.56×10^8	...	10^{14}	$+\infty$

x	1.00009	1.00008	1.00007	...	1.000001	1^+
$\frac{1}{x^2-1}$	1.23×10^8	1.56×10^8	2.04×10^8	...	10^{12}	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty,$$

$x=1$ noktasına soldan ve sağdan gelsek fonksiyon $+\infty$ olmaktadır. aldığı sonsuz değerinden dolayı fonksiyonun $x=1$ de limiti yoktur.

Bir fonksiyonda $x=a$ noktasında sağdan limit ve soldan limit birbirine eşitse ve bu değer sonsuz değilse fonksiyonun $x=a$ da limiti vardır denir.

$\sin(x)/x$ fonksiyonunda $x=1$ noktasına soldan ve sağdan geldiğimizde fonksiyonun değeri 1 dir. Limit vardır.

$\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{(x-1)}$ fonksiyonunda $x=1$ noktasına soldan ve sağdan geldiğimizde fonksiyonun değeri -2 dir. Limit vardır.

TANIM 1 Limit Kuralları

L , M , c ve k reel sayılar ve

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = M, \quad \text{ise}$$

1. *Toplama Kuralı:* $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M$

İki fonksiyonun toplamının limiti limitlerinin toplamıdır.

2. *Fark Kuralı:* $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = L - M$

İki fonksiyonun farklarının limiti limitlerinin farkıdır.

3. *Çarpım Kuralı:* $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

İki fonksiyonun çarpımının limiti limitlerinin çarpımıdır.

4. *Sabitle Çarpım Kuralı:* $\lim_{x \rightarrow c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$

Bir fonksiyonun bir sabit katının limiti fonksiyonun limitinin sabit katıdır.

5. *Bölüm Kuralı:* $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0$

İki fonksiyonun bölümünün limiti, bölünen limitinin sıfır olmaması koşuluyla, limitlerinin bölümüdür.

6. *Kuvvet Kuralı:* r ve s ortak çarpanı bulunmayan iki tamsayı ve $s \neq 0$ ise $L^{r/s}$ 'nin bir reel sayı olması koşuluyla,

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$$

dir. (s çift ise $L > 0$ olduğunu varsayıyoruz)

Bir fonksiyonun herhangi bir rasyonel kuvvetinin limiti, bir reel sayı olması koşuluyla, limitin o kuvvetidir.

TANIM Bir Fonksiyonun Limiti

$f(x)$, x_0 civarında (x_0 'da tanımlı olmayabilir) bir açık aralıkta tanımlı olsun.
Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık,

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ eşitsizliğini sağlayan bütün } x\text{'ler için } |f(x) - L| < \epsilon$$

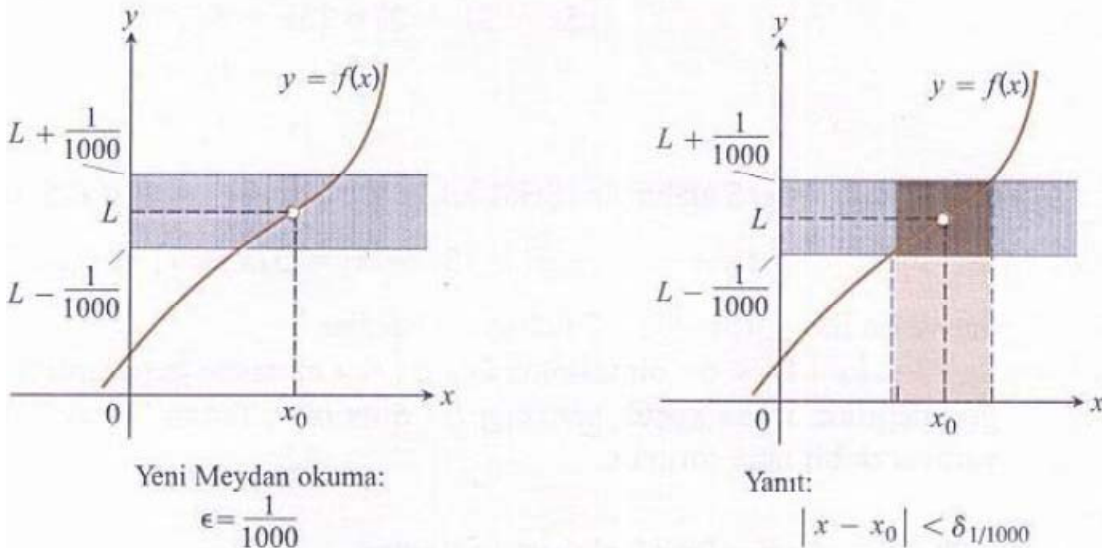
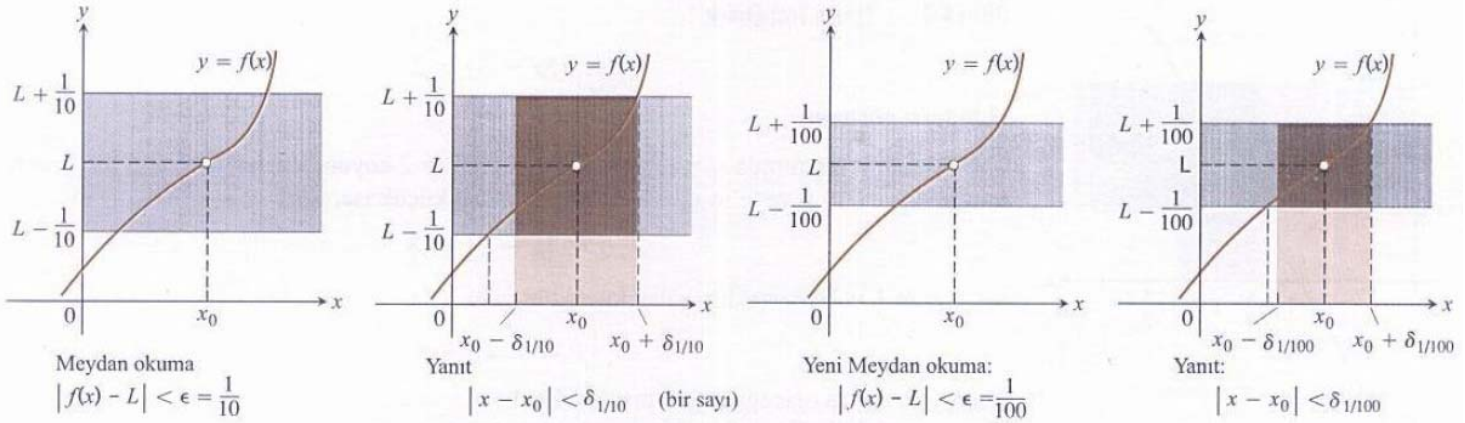
olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse, x x_0 'a yaklaşırken, $f(x)$ L limitine yaklaşıyor der ve

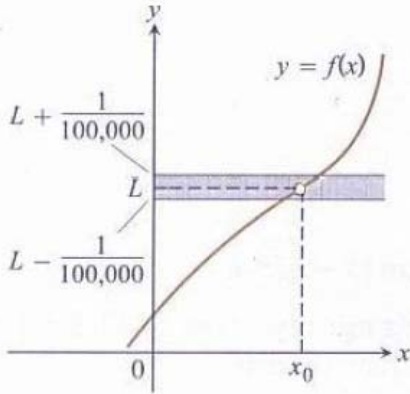
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

Bana bir ξ verdiğinde ben sana bir δ vermeyi taahhüd ediyorum.

Vereceğim δ sınırı içinde kalırsan, yani fonksiyonda x yerine $(x_0 - \delta)$, $(x_0 + \delta)$ arasında bir değer verersen, fonksiyonun değeri kesinlikle $L - \xi$ ile $L + \xi$ arasında kalır.

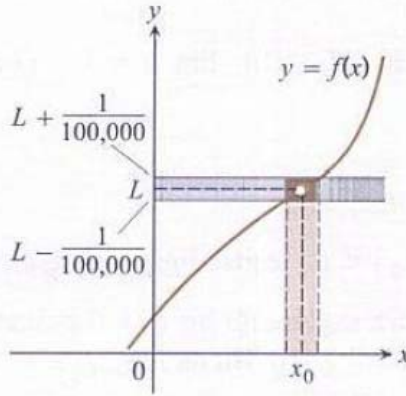
Sen istediğin kadar küçük ξ ver, ben sana δ Vereceğim. ξ u dilediğin kadar (sonsuz küçük) yapabilirsin.





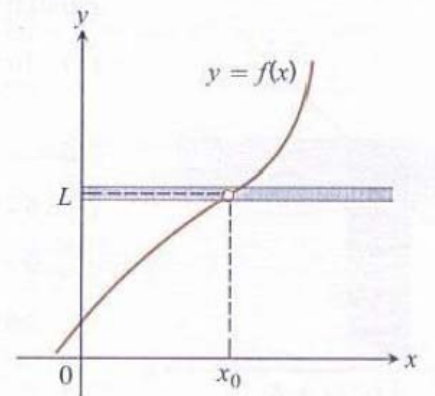
Yeni Meydan okuma:

$$\epsilon = \frac{1}{100,000}$$



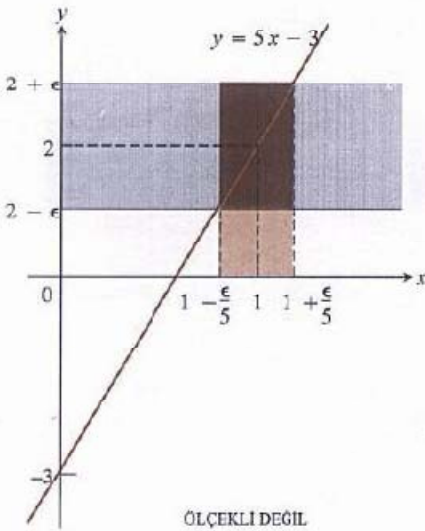
Yanıt:

$$|x - x_0| < \delta_{1/100,000}$$



Yeni Meydan okuma:

$$\epsilon = \dots$$



ÖLÇEKLİ DEĞİL

ŞEKİL 2.15 $f(x) = 5x - 3$ ise,
 $0 < |x - 1| < \epsilon/5$ olması
 $|f(x) - 2| < \epsilon$ olmasını garantiler
 (Örnek 2).

ÖRNEK 2 Tanımı Test Etmek

$$\lim_{x \rightarrow 1} (5x - 3) = 2$$

olduğunu gösterin.

Çözüm Limit tanımında $x_0 = 1$, $f(x) = 5x - 3$ ve $L = 2$ koyun. Verilen herhangi bir $\epsilon > 0$ için, $x \neq 1$ ve $\delta > 0$ ve x 'in $x_0 = 1$ 'e uzaklığı δ 'dan küçük ise, yani

$$0 < |x - 1| < \delta,$$

ise $f(x)$ 'in $L = 2$ 'ye uzaklığı ϵ 'dan küçüktür, yani

$$|f(x) - 2| < \epsilon$$

ifadesinin doğru olacağı uygun bir δ bulmalıyız.

δ 'yı ϵ -eşitsizliğinden geriye doğru giderek buluruz:

$$|(5x - 3) - 2| = |5x - 5| < \epsilon$$

$$5|x - 1| < \epsilon$$

$$|x - 1| < \epsilon/5.$$

Böylece, $\delta = \epsilon/5$ alabiliriz (Şekil 2.15). $0 < |x - 1| < \delta = \epsilon/5$ ise,

$$|(5x - 3) - 2| = |5x - 5| = 5|x - 1| < 5(\epsilon/5) = \epsilon,$$

dur ve bu $\lim_{x \rightarrow 1} (5x - 3) = 2$ olduğunu ispatlar.

$0 < |x - 1| < \delta$ olmasının $|5x - 5| < \epsilon$ olmasını gerektirdiği tek değer $\delta = \epsilon/5$ değeri değildir. Daha küçük herhangi bir δ da olur. Tanım "en iyi" pozitif δ sormuyor, işe yarayacak bir tane soruyor. ■

$$L=2, \quad x_0=1;$$

$\delta = \xi/5$, yani bana vereceğin ξ değerini beşe bol. istediğin δ budur.

$\xi=0.01$ verilsin. iddia: yani ben öyle bir x_0 bulabilir miyim ki $f(x_0)$ ile 2 ile arasındaki fark $\xi=0.01$ den küçük olsun. Böyle bir x_0 değeri var midir.

Cevap: $\delta = \xi/5 = 0.01/5 = 0.002$ yani x_0 yerine $1-0.002$ ile $1+0.002$ arasında değerler verirsen $f(x_0)$ kesinlikle $2-0.01$ ile $2+0.01$ arasında bir değer olur, $2-0.01$ ile $2+0.01$ dışına çıkmaz. Ben bunu garanti ediyorum.

$$1-0.002=0.998, \quad 1+0.002=1.002$$

$$2-0.01=1.99, \quad 2+0.01=2.01$$

Deneme: 0.998 ile 1.002 arasında bir değer olarak 0.9985 veriyorum.

$$f(x_0) = 5x_0 - 3 = 5 \cdot 0.9985 - 3 = 1.9925$$

1.9925 sayısı 1.99 ile 2.01 arasında midir.

evet öyledir.

