

Ödev 7

1) Aşağıda kartezyen koordinat sisteminde verilen noktaları küresel koordinat sistemine çevirin.
θ: x eksenini ile aradaki açı. φ: z eksenini ile aradaki açıdır.

	x	y	z	ρ	θ	φ
P ₁	10	6	5			
P ₂	10	7	-5			
P ₃	-10	5	-5			

Cozum: A=6, B=7

Pr1) Kartezyen Koordinatlarda x=10, y=6, z=5

Küresel Koordinatlara çevirin

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{10^2 + 6^2 + 5^2} = 12.69$$

$$\phi = \arccos(z/\rho) = \arccos(5/12.69) = 66.79$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} = \frac{6}{10} = 30.96$$

Pr1) Kartezyen Koordinatlarda x=10, y=7, z=-5

Küresel Koordinatlara çevirin

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{10^2 + 7^2 + 5^2} = 13.19$$

$$\phi = \arccos(z/\rho) = \arccos(-5/13.19) = 112.27$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} = \frac{7}{10} = 34.99$$

Pr1) Kartezyen Koordinatlarda x=-10, y=5, z=-5

Küresel Koordinatlara çevirin

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{10^2 + 5^2 + 5^2} = 12.25$$

$$\phi = \arccos(z/\rho) = \arccos(-5/12.25) = 114.09$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} = \frac{5}{-10} = 153.43$$

2) Aşağıda küresel koordinat sisteminde verilen noktaları kartezyen koordinat sistemine çevirin.
θ: x eksenini ile aradaki açı. φ: z eksenini ile aradaki açıdır.

	ρ	θ	φ	x	y	z
P ₁	10	60	45			

P ₂	10	120	120			
P ₃	10	-30	60			

Cozum:

Pr1)Kuresel Koordinatlarda $\rho = 10, \phi = 45$

$\theta = 60$ kartezyan Korrdiratlara cevirin

$$z = \rho \cos(\phi) = 10 * \cos(45) = 7.07$$

$$x = \rho \sin(\phi) \cos(\theta) = 10 * \sin(45) * \cos(60) = 3.54$$

$$y = \rho \sin(\phi) \sin(\theta) = 10 * \sin(45) * \sin(60) = 6.12$$

veya

$$r = \rho \sin(\phi) = 10 * \sin(45) = 7.07$$

$$x = r \cos(\theta) = 7.07 * \cos(60) = 3.54$$

$$y = r \sin(\theta) = 7.07 * \sin(60) = 6.12$$

Pr1)Kuresel Koordinatlarda $\rho = 10, \phi = 120$

$\theta = 120$ kartezyan Korrdiratlara cevirin

$$z = \rho \cos(\phi) = 10 * \cos(120) = -5$$

$$x = \rho \sin(\phi) \cos(\theta) = 10 * \sin(120) * \cos(120) = -4.33$$

$$y = \rho \sin(\phi) \sin(\theta) = 10 * \sin(120) * \sin(120) = 7.5$$

veya

$$r = \rho \sin(\phi) = 10 * \sin(120) = 8.66$$

$$x = r \cos(\theta) = 8.66 * \cos(120) = -4.33$$

$$y = r \sin(\theta) = 8.66 * \sin(120) = 7.5$$

Pr1) Kuresel Koordinatlarda $\rho = 10$, $\phi = 60$

$\theta = -30$ Kartezyan Koordinatlara çevirin

$$z = \rho \cos(\phi) = 10 * \cos(60) = 5$$

$$x = \rho \sin(\phi) \cos(\theta) = 10 * \sin(60) * \cos(-30) = 7.5$$

$$y = \rho \sin(\phi) \sin(\theta) = 10 * \sin(60) * \sin(-30) = -4.33$$

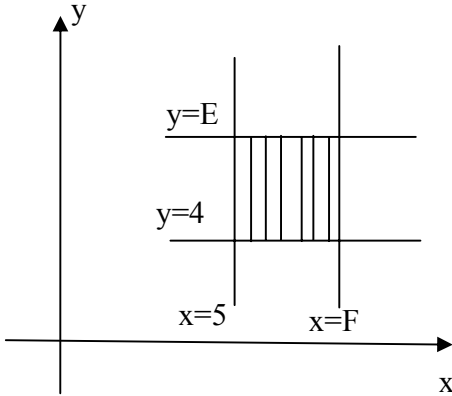
veya

$$r = \rho \sin(\phi) = 10 * \sin(60) = 8.66$$

$$x = r \cos(\theta) = 8.66 * \cos(-30) = 7.5$$

$$y = r \sin(\theta) = 8.66 * \sin(-30) = -4.33$$

3) Şekildeki taralı bölgeye $x=u+2v$, $y=u-v$ dönüşümü uygulanıyor. taralı bölge $u-v$ koordinat sisteminde hangi bölgeye dönüşür. $u-v$ koordinat sisteminde taralı bölgenin oluşturduğu bölgeyi çizin.



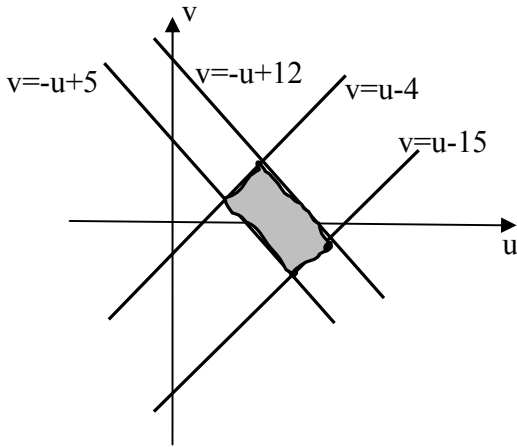
Cozum $F=12$, $E=15$

$$x=5 \rightarrow x=u+v \rightarrow 5=u+v \rightarrow v=-u+5$$

$$x=12 \rightarrow x=u+v \rightarrow 12=u+v \rightarrow v=-u+12$$

$$y=4 \rightarrow y=u-v \rightarrow 4=u-v \rightarrow v=u-4$$

$$y=15 \rightarrow y=u-v \rightarrow 15=u-v \rightarrow v=u-15$$



4) Aşağıdaki integralleri çözün.

a) $\int_{x=2}^4 \int_{y=Gx}^{x^2} xy \, dy \, dx$ b) $\int_{y=2}^{y=4} \int_{x=y}^{x=Hy} xy \, dx \, dy$

Cozum G=3, H=5

Pr1) Asağıdaki Integrali Hesaplayın

$$\int_{x=2}^4 \int_{y=3x}^{x^2} (xy) \, dy \, dx$$

Cozum: Integrali asağıdaki sıra ile cozebiliriz

$$\left[\int_{x=2}^4 \left(\int_{y=3x}^{x^2} (xy) \, dy \right) \, dx \right] \quad (1)$$

Önce $\int_{y=3x}^{x^2} (\dots) \, dy$ integralini hesapla

$$\int_{y=3x}^{x^2} (xy) \, dy = ?$$

$$\begin{aligned} \int_{y=3x}^{x^2} (xy) \, dy &= \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=3x}^{x^2} \\ &= \left[\frac{1}{2} x(x^2)^2 \right] - \left[\frac{1}{2} x(3x)^2 \right] \\ &= \left[\frac{1}{2} x^5 \right] - \left[\frac{9}{2} x^3 \right] \\ &= \frac{1}{2} x^5 - \frac{9}{2} x^3 \end{aligned}$$

Bu ifadeyi (1)de yerine koyalım

$$\left[\int_{x=2}^4 \left(\frac{1}{2} x^5 - \frac{9}{2} x^3 \right) \, dx \right] \quad (2)$$

$\int_{x=2}^4 (\dots) dx$ integralini hesapla

$$\int_{x=2}^4 ((1/2)x^5 - (9/2)x^3) dx = ?$$

$$\begin{aligned} \int_{x=2}^4 ((1/2)x^5 - (9/2)x^3) dx &= [(1/12)x^6 - (9/8)x^4]_{x=2}^4 \\ &= [(1/12)(4)^6 - (9/8)(4)^4] - [(1/12)(2)^6 - (9/8)(2)^4] \\ &= [(160/3)] - [-(38/3)] \end{aligned}$$

$$= 66$$

$$= 66$$

Pr1) Asagidaki Integrali Hesaplayin

$$\int_{y=2}^4 \int_{x=y}^{5y} (xy) dx dy$$

Cozum: Integrali asagidaki sira ile cozebiliriz

$$\left[\int_{y=2}^4 \left(\int_{x=y}^{5y} (xy) dx \right) dy \right] \quad (1)$$

Once $\int_{x=y}^{5y} (\dots) dx$ integralini hesapla

$$\int_{x=y}^{5y} (xy) dx = ?$$

$$\begin{aligned} \int_{x=y}^{5y} (xy) dx &= [(1/2)x^2y]_{x=y}^{5y} \\ &= [(1/2)(5y)^2y] - [(1/2)(y)^2y] \\ &= [(25/2)y^3] - [(1/2)y^3] \\ &= 12y^3 \end{aligned}$$

Bu ifadeyi (1)de yerine koyelim

$$\left[\int_{y=2}^4 (12y^3) dy \right] \quad (2)$$

$\int_{y=2}^4 (\dots) dy$ integralini hesapla

$$\int_{y=2}^4 (12y^3) dy = ?$$

$$\int_{y=2}^4 (12y^3) dy = [(12/4)y^4]_{y=2}^4$$

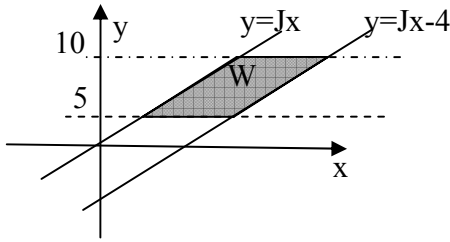
$$= [(12/4)(4)^4] - [(12/4)(2)^4]$$

$$=[768]-[48]$$

$$=720$$

$$=720$$

5) Bir $f(x,y)$ fonksiyonunun şekilde çizilen W bölgesi üzerinde integrali alınacaktır. Integrali yazın.



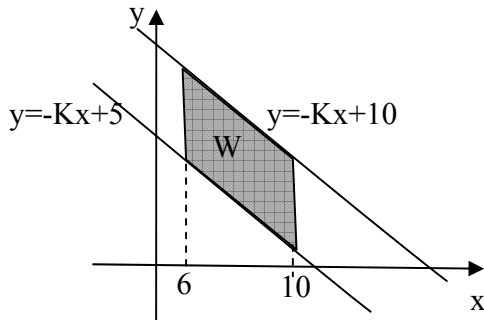
$$\int_{y=\dots}^{y=\dots} \int_{x=\dots}^{x=\dots} f(x,y) dW$$

Cozum

$$\int_{y=5}^{y=10} \int_{x=y/J}^{x=(y+4)/J} f(x,y) dx dy$$

,

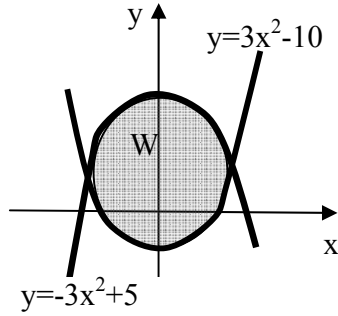
6) Bir $f(x,y)$ fonksiyonunun şekilde çizilen W bölgesi üzerinde integrali alınacaktır. a) Integrali yazın. b) integrali hesaplayın.



Cozum

$$\int_{x=6}^{x=10} \int_{y=-Kx+5}^{y=-Kx+10} f(x,y) dy dx$$

7) a) $f(x,y) = x+y$ fonksiyonunun şekilde çizilen W bölgesi üzerinde integrali yazın. b) integrali hesaplayın.



Cozum: $3x^2 - 10 = -3x^2 + 14 \rightarrow 6x^2 = 24 \rightarrow x = \pm 2$

$$\int_{x=-2}^{x=2} \int_{y=-3x^2+14}^{y=3x^2-10} (x+y) dy dx$$

Pr1) Asagidaki Integrali Hesaplayin

$$\int_{x=-2}^2 \int_{y=-3x^2+14}^{3x^2-10} (x+y) dy dx$$

Cozum: Integrali asagidaki sira ile cozebiliriz

$$\left[\int_{x=-2}^2 \left(\int_{y=-3x^2+14}^{3x^2-10} (x+y) dy \right) dx \right] \quad (1)$$

Once $\int_{y=-3x^2+14}^{3x^2-10} (\dots) dy$ integralini hesapla

$$\int_{y=-3x^2+14}^{3x^2-10} (x+y) dy = ?$$

$$\int_{y=-3x^2+14}^{3x^2-10} (x+y) dy = [xy + (1/2)y^2] \Big|_{y=-3x^2+14}^{3x^2-10}$$

$$= [x(3x^2 - 10) + (1/2)(3x^2 - 10)^2] - [x(-3x^2 + 14) + (1/2)(-3x^2 + 14)^2]$$

$$= [3x^3 - 10x + (9/2)x^4 - 30x^2 + 50] - [-3x^3 + 14x + (9/2)x^4 - 42x^2 + 98]$$

$$= 6x^3 - 24x + 12x^2 - 48$$

Bu ifadeyi (1)de yerine koyelim

$$\left[\int_{x=-2}^2 (6x^3 - 24x + 12x^2 - 48) dx \right] \quad (2)$$

$\int_{x=-2}^2 (\dots) dx$ integralini hesapla

$$\int_{x=-2}^2 (6x^3 - 24x + 12x^2 - 48) dx = ?$$

$$\int_{x=-2}^2 (6x^3 - 24x + 12x^2 - 48) dx = [(6/4)x^4 - (24/2)x^2 + (12/3)x^3 - 48x]_{x=-2}^2$$

$$= [(6/4)(2)^4 - (24/2)(2)^2 + (12/3)(2)^3 - 48(2)] - [(6/4)(-2)^4 - (24/2)(-2)^2 + (12/3)(-2)^3 - 48(-2)]$$

$$= [-88] - [40]$$

$$= -128$$

$$= -128$$