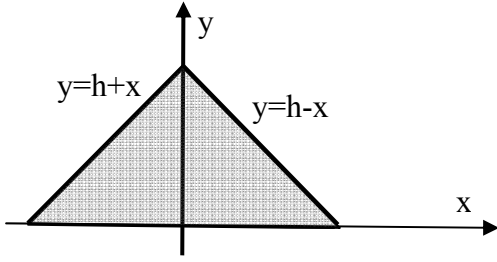


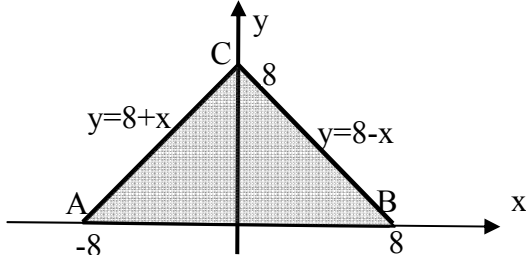
Ödev8

1) $x=u+v$, $y=u-v$ dönüşümünü uygulandığında şekildeki bolgenin $u-v$ koordinat sisteminde alacağı şekli bulun.



Cozum: $h=8$

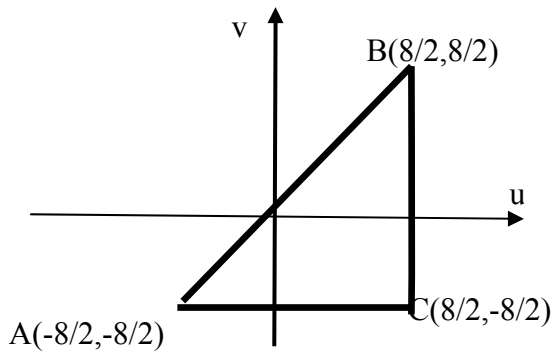
$x=u+v$	$x=u+v$
$y=u-v$	$y=u-v$
+	-
-----	-----
$x+y=2u \rightarrow u=(x+y)/2$	$x-y=2v \rightarrow v=(x-y)/2$



$$x=u+v, y=u-v \rightarrow u=(x+y)/2, v=(x-y)/2$$

Sinirlar

$A(x=-8,y=0)$	A'	$u=(x+y)/2=-8/2, v=(x-y)/2=-8/2$
$B(x=8,y=0)$	B'	$u=(x+y)/2=8/2, v=(x-y)/2=8/2$
$C(x=0,y=8)$	C'	$u=(x+y)/2=8/2, v=(x-y)/2=-8/2$



AC dogrusu

$$y=8+x \rightarrow (u-v)=8+(u+v) \rightarrow -2v=8 \rightarrow v=-8/2$$

CB dogrusu

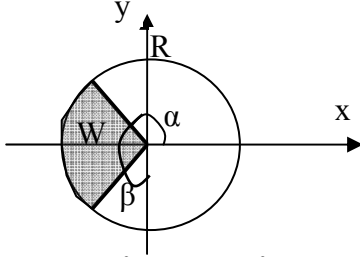
$$y=8-x \rightarrow (u-v)=8-(u+v) \rightarrow 2u=8 \rightarrow u=8/2$$

AB dogrusu

$$y=0 \rightarrow (u-v)=0 \rightarrow u=v$$

2) $\iint_W (x^2 + y^2) dy dx$ integrali şekilde çizilen W bölgesi üzerinde hesaplanmak isteniyor.

a) kutupsal koordinatlara geçerek, integrali kutupsal koordinatlarda yazın.
b) integrali çözün.



Cozum $\alpha=115^\circ$, $\beta=210^\circ$

$$\iint_W (x^2 + y^2) dy dx = \int \int g(r, \theta) J dr d\theta$$

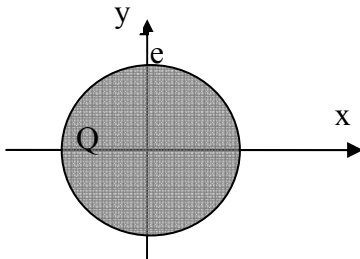
$$x=r \cos \theta, \quad y=r \sin \theta, \quad \rightarrow (x^2+y^2)=r^2, \quad J=r$$

$$\begin{aligned} \int \int g(r, \theta) J dr d\theta &= \int_{\theta=\alpha}^{\beta} \int_{r=0}^{r=R} r^2 \cdot r dr d\theta \\ &= \int_{\theta=\alpha}^{\beta} \left(\frac{r^4}{4} \Big|_{r=0}^{r=R} \right) d\theta = \int_{\theta=\alpha}^{\beta} \frac{R^4}{4} d\theta = \frac{R^4}{4} \theta \Big|_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \\ &= \frac{R^4}{4} (\beta - \alpha) = \frac{R^4}{4} (3.66 - 2) = \frac{R^4}{4} (1.66) \end{aligned}$$

$$\alpha=115^\circ=115 \frac{3.14}{180} = 2 \text{radyan}, \quad \beta=210^\circ=210 \frac{3.14}{180} = 3.66 \text{radyan}$$

α, β radyan olarak alınmalıdır.

3) $x=r \cos \theta, \quad y=r \sin \theta$ dönüşümünü uygulayarak $\iint_Q \sqrt{(x^2 + y^2)^3} dy dx$ integralini çözün. Q bölgesi merkezi orijin olan $r=e$ yarıçaplı dairedir.



Cozum

$$\iint_Q \sqrt{(x^2 + y^2)^3} dy dx = \int \int g(r, \theta) J dr d\theta$$

$$x=r \cos \theta, \quad y=r \sin \theta, \quad \rightarrow \sqrt{(x^2 + y^2)^3} = [(r^2)^3]^{1/2} = r^3, \quad J=r$$

$$\int \int g(r, \theta) J dr d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=e} r^3 r dr d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\frac{r^5}{5} \Big|_{r=0}^{r=e} \right) d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{R^5}{5} d\theta = \frac{R^5}{5} \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 2\pi R^5/5 \text{ ntegrali}$$

4) $\int_{x=0}^{x=5} \int_{y=0}^{y=Px+10} \sqrt{ax+2y} (x-cy)^3 dydx$ integralini hesaplanmak isteniyor. integrali

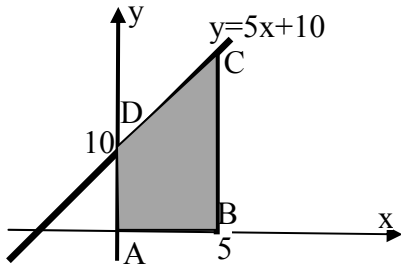
basit cozulebilir forma getirmek için hangi donusumleri yapmak gerekir. Eski ve yeni koordinat sisteminde integral bolgesini cizin. Yeni koordinat sisteminde integrasyonu yazın.

Cozum: $a=1, c=2, P=5$

$ax+2y=u, x-cy=v$ donusumu yapmalıyız

$x+2y=u, x-2y=v \rightarrow x=(u+v)/2, y=(u-v)/4$

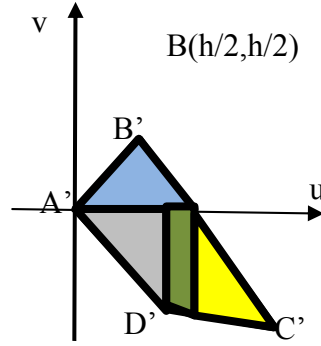
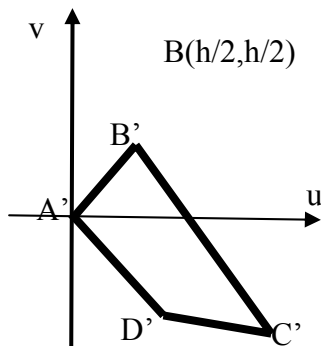
$y=5x-10 \rightarrow (u-v)/4=5(u+v)/2-10 \rightarrow v=(-9/11)u+10/11$



$A(x=0, y=0), B(x=5, y=0), C(x=5, y=35), D(x=0, y=10),$
 $x+2y=u, x-2y=v$

$A'(u=0, v=0), B'(u=5, v=5), C'(u=75, v=-65), D'(u=20, v=-20),$

$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -1$$



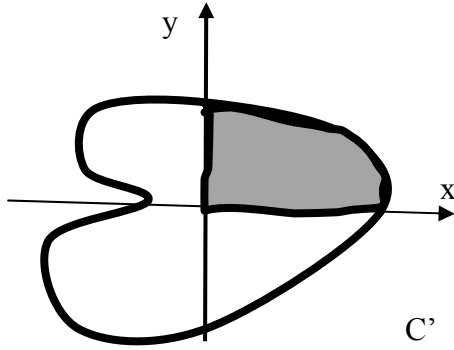
$$\int_{x=0}^{x=5} \int_{y=0}^{y=Px+10} \sqrt{ax+2y} (x-cy)^3 dydx = \int_u \int_v \sqrt{u} v^3 J dvdu$$

Sekli bolgelere ayirarak integrasyonu hesaplayabiliriz

$$\int_u \int_v \sqrt{u} v^3 J dvdu = \iint_{Q1} \sqrt{u} v^3 J dvdu + \iint_{Q2} \sqrt{u} v^3 J dvdu + \iint_{Q3} \sqrt{u} v^3 J dvdu + \iint_{Q4} \sqrt{u} v^3 J dvdu +$$

5) $r=A+\cos(4\theta)$ egrisinin birinci bolgede kalan kısmi ile çevrilen bolgenin alanini bulmak için gerekli integralleri yazın. Integrali basit cozulebilir forma getirin.

Not kutupsal koordinatlarda alan $\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r=g_1(\theta)}^{r=g_2(\theta)} r \, dr \, d\theta$ integrali ile hesaplanır.



$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \int_{r=0}^{r=A+\cos(4\theta)} r \, dr \, d\theta$$

6) D bölgesi $\frac{(x+m)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ denklemleri ile verilen elipsoiddir.

$\iiint_D dzdydx$ integralini $x = \frac{4u}{R} - m$, $y = \frac{vb}{R} + 3$, $z = \frac{wc}{R}$, dönüşümü ile bolgenin

yeni integralini elde edin. Kuresel koordinatlara geçerek Integrali basit cozulebilir forma getirin.

Cozum:

$$\iiint_D f(x, y, z) dzdydx = \iiint_D g(u, v, w) J \, du \, dv \, dw$$

$$f(x, y, z) = 1 \rightarrow g(u, v, w) = 1$$

$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4/R & 0 & 0 \\ 0 & b/R & 0 \\ 0 & 0 & c/R \end{vmatrix} = \frac{4bc}{R^3}$$

Kuresel koordinatlara geceriz

$$r = \rho \sin \phi$$

$$\rho = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \sqrt{w^2 + r^2}$$

$$\phi = \arccos(w/\rho)$$

$$\theta = \arccos(u/v)$$

$$J_2 = \rho^2 \sin \phi,$$

$$\iiint_D g(u, v, w) J du dv dw = \iiint_D h(\rho, \phi, \theta) J_2 d\rho d\phi d\theta$$

$$g(u, v, w) = 1 \rightarrow h(\rho, \phi, \theta) = 1$$

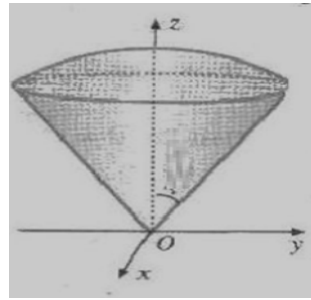
$$\iiint_D f(x, y, z) dz dy dx = \iiint_D g(u, v, w) J du dv dw$$

$$= \iiint_D h(\rho, \phi, \theta) J_2 d\rho d\phi d\theta$$

$$= \int_{\rho=0}^r \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{4bc}{R^3} \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi = \frac{4bc}{R^3} \int_{\rho=0}^r \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$$

$$= \frac{4bc}{R^3} \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{16\pi bc}{3}$$

7) Üstten $x^2 + y^2 + z^2 = K$ kuresi,
alttan $z = \sqrt{Lx^2 + Ly^2}$ konisi tarafından
sınırlanan bölgenin hacmi hesaplanmak isteniyor.
Gerekli integralleri yazın. Silindirik
koordinatlara geçerek integrali basit çözülebilir
forma getirin.

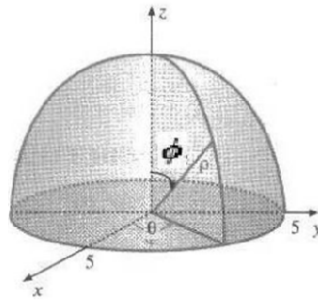


Çözüm: $\iiint_Q \int_{z=\sqrt{Lx^2+Ly^2}}^{z=\sqrt{K-x^2-y^2}} 1 dz dy dx = \iiint_Q \left(\sqrt{K-x^2-y^2} - \sqrt{Lx^2+Ly^2} \right) dy dx$

kutupsal koordinatlara geçsek

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r=L} \left(\sqrt{K-r^2} - \sqrt{Lr^2} \right) r dr d\theta$$

8) Yarıçapı N olan yarı kurenin yoğunluğu
 $\delta(x, y, z) = xy^M z$ şeklinde değişmektedir. Bu yarı
kurenin ağırlığını bulmak için gerekli integrasyon
formüllerini a) Kartezyen koordinatlarda yazın.
b) integrasyonu küresel koordinatlara çevirin.
Integrali basit çözülebilir forma getirin



9) Alttan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi, üstten $z=2$ düzlemi ile sınırlanan bölgenin
yoğunluğu homojendir. Bölgenin ağırlık merkezini bulmak için gerekli
integralleri yazın. b) integrasyonu silindirik koordinatlara çevirin. Integrali basit
çözülebilir forma getirin

