

Rasgele Değişkenler (Random Variables)

Örnek 246)

iki zar aynı anda atılsa Örnek uzay

$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), \dots, (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

şeklinde 36 elemanlı olan bir set idi.

Burada X, Y, Z değişkenlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

X: S'nin her bir elemanında (her bir olayda) sayıların maksimumu olsun. Yani zarların (1,3) gelmesi olayında 3, zarların (2,5) gelmesi olayında 5. $X(1,3)=3$, $X(1,6)=6$, $X(2,5)=5$, vs.

Y: S'nin her bir elemanında (her bir olayda) sayıların toplamı olsun. Yani zarların (1,3) gelmesi olayında $1+3=4$, zarların (2,5) gelmesi olayında $2+5=7$. $Y(1,3)=4$, $Y(1,6)=7$, $Y(2,5)=7$, vs.

Z: S'nin her bir elemanında (her bir olayda) sayıların çarpımı olsun. Yani zarların (1,3) gelmesi olayında $1 \times 3=3$, zarların (2,5) gelmesi olayında $2 \times 5=10$. $Z(1,3)=3$, $Z(1,6)=6$, $Z(2,5)=10$, vs.

X'in tanım uzayı, yani X'in alabileceği değerler $R_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olacaktır. X bunların dışında hiçbir değer alamaz.

Y'nin tanım uzayı, yani Y'nin alabileceği değerler $R_Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

Z'nin tanım uzayı, yani Z'nin alabileceği değerler

$$R_Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$$

şeklinde olacaktır.

Burada X, Y, Z **Rasgele Değişkenler (Random variables)** olarak adlandırılır.

Olasılık yoğunluk Fonksiyonu (Probability Density Function)

$f(x)$: $P(X=a)$, X'in a'ya eşit olma olasılığı. $P(\{s \in S: X(s)=a\})$

$f(x)$ fonksiyonuna **Olasılık yoğunluk Fonksiyonu** denir.

Yukarıdaki çift zar atma örneğinde.

$P(X=3)$, X'in 3'e eşit olma olasılığı. maksimum değer 3 olma olasılığı.

$P(Y=10)$, Y'in 10'a eşit olma olasılığı. iki Zarın toplamının 10 olma olasılığı.

$P(Z=15)$, Z'in 15'e eşit olma olasılığı. iki Zarın çarpımının 15 olma olasılığı.

Simdi bu olasılıkları tek tek hesaplayalım.

$X(a,b)=\max(a,b)$ idi. X in alabileceği değerler $R_X=\{1,2,3,4,5,6\}$ olabilir.

$\max(a,b)=1$ eşitliğini sağlayan tek a,b değeri 1,1 dir. o halde $P(X=1)=1/36$, veya $f(1)=1/36$

$\max(a,b)=2$ eşitliğini sağlayan a,b değerleri (1,2),(2,1),(2,2) . O halde $P(X=2)=3/36$, veya $f(2)=3/36$

Benzer şekilde

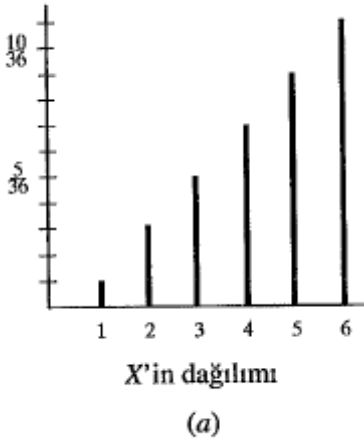
$\max(a,b)=3$ (1,3),(2,3),(3,3) ,(3,1),(3,2). $P(X=3)=5/36$, veya $f(3)=5/36$

$\max(a,b)=4$ (1,4),(2,4),(3,4) ,(4,4), (4,1), (4,2), (4,3), $\rightarrow f(4)=7/36$

$\max(a,b)=5$ (1,5),(2,5),(3,5) , (4,5), (5,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), $\rightarrow f(5)=9/36$

$\max(a,b)=6$ (1,6),(2,6),(3,6) , (4,6), (5,6), (6,6),(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), $\rightarrow f(6)=11/36$

x	1	2	3	4	5	6
f(x)	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36



Y rasgele değişkenini ele alalım. $Y(a,b)=a+b$ idi. Y in alabileceği değerler

$R_Y=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ olabilir.

$Y(a,b)=2$ eşitliğini sağlayan tek a,b değeri 1,1 dir. o halde $P(Y=2)=1/36$, veya $h(2)=1/36$

$Y(a,b)=a+b=3$ eşitliğini sağlayan a,b değerleri (1,2),(2,1) . O halde $P(Y=3)=2/36$, veya $h(3)=2/36$

$Y(a,b)=a+b=4$ eşitliğini sağlayan a,b değerleri (1,3),(3,1),(2,2) . O halde $P(Y=4)=3/36$, $h(4)=3/36$

$Y(a,b)=a+b=5$ eşitliğini sağlayan a,b değerleri (1,4),(4,1),(3,2),(2,3) . $P(Y=5)=4/36$, $h(5)=4/36$

$Y(a,b)=a+b=6 \rightarrow (1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3) \rightarrow h(6)=5/36$

$$Y(a,b)=a+b=7 \rightarrow (1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3) \rightarrow h(7)=6/36$$

$$Y(a,b)=a+b=8 \rightarrow (2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4) \rightarrow h(8)=5/36$$

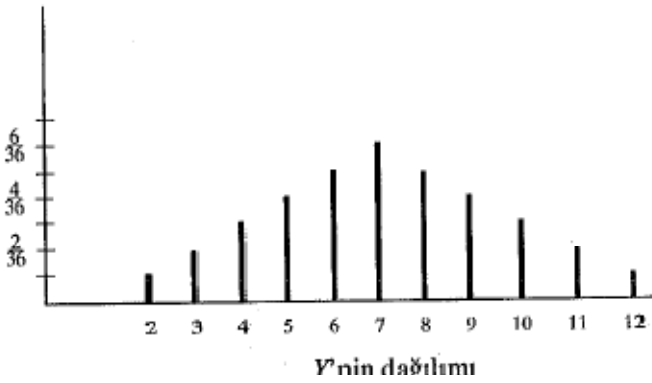
$$Y(a,b)=a+b=9 \rightarrow (3,6),(6,3),(4,5),(5,4) \rightarrow h(9)=4/36$$

$$Y(a,b)=a+b=10 \rightarrow (4,6),(6,4),(5,5) \rightarrow h(10)=3/36$$

$$Y(a,b)=a+b=11 \rightarrow (5,6),(6,5) \rightarrow h(11)=2/36$$

$$Y(a,b)=a+b=12 \rightarrow (6,6) \rightarrow h(12)=1/36$$

y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
h(y)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36



Z rasgele değişkenini ele alalım. $Z(a,b)=ab$ idi. Z nin alabileceği değerler

$$R_Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$$

$Z(a,b)=1$ eşitliğini sağlayan tek a,b değeri 1,1 dir. o halde $P(Z=1)=1/36$, veya $g(1)=1/36$

$Z(a,b)=ab=2$ eşitliğini sağlayan a,b değerleri (1,2),(2,1), . O halde $P(Z=2)=2/36$, veya $g(2)=2/36$

$Z(a,b)=ab=3$ eşitliğini sağlayan a,b değerleri (1,3),(3,1), . O halde $P(Z=3)=2/36$, veya $g(2)=2/36$

$$Z(a,b)=ab=4 \rightarrow (1,4),(4,1),(2,2) \rightarrow g(4)=3/36$$

$$Z(a,b)=ab=5 \rightarrow (1,5),(5,1) \rightarrow g(5)=2/36$$

$$Z(a,b)=ab=6 \rightarrow (1,6),(6,1),(2,3),(3,2) \rightarrow g(6)=4/36$$

$$Z(a,b)=ab=8 \rightarrow (2,4),(4,2) \rightarrow g(8)=2/36$$

$$Z(a,b)=ab=9 \rightarrow (3,3) \rightarrow g(9)=1/36$$

$$Z(a,b)=ab=10 \rightarrow (2,5),(5,2) \rightarrow g(10)=2/36$$

$$Z(a,b)=ab=12 \rightarrow (2,6),(6,2),(3,4),(4,3) \rightarrow g(12)=4/36$$

$$Z(a,b)=ab=15 \rightarrow (3,5),(5,3) \rightarrow g(15)=2/36$$

$$Z(a,b)=ab=16 \rightarrow (4,4) \rightarrow g(16)=1/36$$

$$Z(a,b)=ab=18 \rightarrow (3,6),(6,3), \rightarrow g(18)=2/36$$

$$Z(a,b)=ab=20 \rightarrow (4,5),(5,4), \rightarrow g(20)=2/36$$

$$Z(a,b)=ab=24 \rightarrow (4,6),(6,4), \rightarrow g(24)=2/36$$

$$Z(a,b)=ab=25 \rightarrow (5,5), \rightarrow g(25)=1/36$$

$$Z(a,b)=ab=30 \rightarrow (5,6),(6,5), \rightarrow g(30)=2/36$$

$$Z(a,b)=ab=36 \rightarrow (6,6) \rightarrow g(36)=1/36$$

z	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
g(z)	1/36	2/36	2/36	3/36	2/36	4/36	2/36	1/36	2/36	4/36	2/36	1/36	2/36	2/36	2/36	1/36	2/36	1/36

Burada

$$X \rightarrow f(x)$$

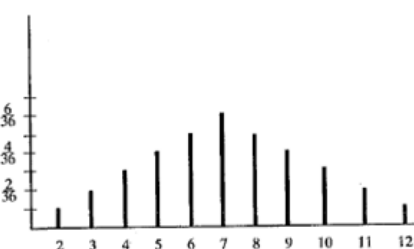
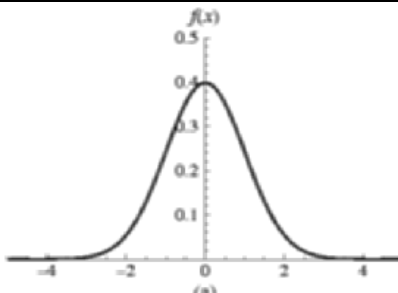
$$Y \rightarrow h(y)$$

$$Z \rightarrow g(z)$$

bağlantılarına **olasılık fonksiyonu** (probability function) denir.

Örneğimizde X,Y,Z ayırık (kesikli) değerlerdir. $f(x)$, $h(y)$, $g(z)$ fonksiyonları belli (tamsayı) değerlerde tanımlanmıştır. mesela $f(x)$ fonksiyonunda $f(1.1)$, $f(1.5)$, $f(2.6)$, tanımsızdır.

Eğer $f(x)$ fonksiyonu sürekli ise **olasılık yoğunluk fonksiyonu** (probability density function) olarak adlandırılır.

Ayrık(Kesikli) (discrete)	sürekli (continuous)
$f(x_k)$:olasılık fonksiyonu olasılık yoğunluk fonksiyonu probability density function probability mass function	$f(x)$:olasılık yoğunluk fonksiyonu, probability density function
$P(X=x_k)=f(x_k)$	$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$
$\sum_{k=1}^n f(x_k) = 1$	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
	

$f(x_k) > 0$ (Tanımlanan Butun x_k ler için)	$f(x) > 0$ (Butun x ler için)
--	---------------------------------

sürekli olasılık fonksiyonlarında $P(a \leq x \leq b)$ x değişkeninin a ile b arasında bulunma ihtimalinin rakamsal değerini verir. sürekli olasılık fonksiyonlarında $P(x=a)=0$ olur. Bu durum $P(a \leq x \leq a) = \int_a^a f(x)dx = 0$ olduğundan da görülebilir.

Beklenen değer, Ortalama değer (Expected value, mean)

X Rasgele değişken, ve dağılımı aşağıdaki gibi olsun.

x	x_1	x_2	x_3		x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$		$f(x_n)$

X in ortalaması, beklenen değeri (expected value)

$$E(X) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + x_3 f(x_3) + \dots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i)$$

Beklenen değer fiziksel olarak tahmini beklenen değeri verir.

sürekli sistemlerde $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

Örnek 154) Örnek 43 deki zar atma işlemini düşünelim. iki zar aynı anda atılıyor. $X(a,b)=\max(a,b)$. $Y(a,b)=a+b$, $Z(a,b)=ab$. $E(X), E(Y), E(Z)$ değerlerini hesaplayın.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

$$E(X) = 1(1/36) + 2(3/36) + 3(5/36) + 4(7/36) + 5(9/36) + 6(11/36) = 4.47$$

y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$h(y)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

$$E(Y) = 2(1/36) + 3(2/36) + 4(3/36) + 5(4/36) + \dots + 11(2/36) + 12(1/36) = 7.0$$

z	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
g(z)	1/36	2/36	2/36	3/36	2/36	4/36	2/36	1/36	2/36	4/36	2/36	1/36	2/36	2/	2/	1/	2/36	1/36

$$E(Z) = 1(1/36) \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 f(x_i) + 2(2/36) + 3(2/36) + 4(3/36) + \dots + 30(2/36) + 36(1/36) = 12.25$$

M.inci moment

(Ayrik sistemlerde) $E(X^m) = \sum_{i=1}^n x_i^m f(x_i)$, $m=1,2,\dots$

(sürekli sistemlerde) $E(X^m) = \int_{-\infty}^{\infty} x^m f(x) dx$, $m=1,2,\dots$

Varyans, Standart Sapma

Teorem 41.

a) $E(kX) = kE(X)$, b) $E(X+k) = E(X)+k$, c) $E(aX+b) = aE(X)+b$,

d) $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$

$\mu = \mu_x = E(x)$ ortalama değeri de denir.

$$\text{Var}(X) = (x_1 - \mu)^2 f(x_1) + (x_2 - \mu)^2 f(x_2) + \dots + (x_n - \mu)^2 f(x_n) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 f(x_i) = E((X - \mu)^2)$$

$$\sigma_x = \sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}, \quad \text{Var}(X) = \sigma^2$$

Var: Varyans, σ : standart sapma

Teorem 55 a138-135

$$\text{Var}(X) = x_1^2 f(x_1) + x_2^2 f(x_2) + \dots + x_n^2 f(x_n) - \mu^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 f(x_i) - \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Açıklama: Varyans $\text{var}(X) = \sigma^2$ ve standart sapma σ 'nın her ikisi de, x_i değerlerinin ortalama μ çevresinde ağırlıklandırılmış yayılımını ölçer ancak, standart sapma σ 'nın bir avantajı, μ ile aynı birimde olmasıdır.

Teorem 5.6: X bir rasgele değişken, a ve b sabitler olsun. Bu durumda

$$\text{var}(aX + b) = a^2 \text{var}(X) \quad \text{ve} \quad \sigma_{aX+b} = |a| \sigma_X \text{ dir.}$$

Teorem 5.6'nın sıklıkla ortaya çıkan özel iki durumu vardır: İlkinde $a = 1$ ve ikincisinde $b = 0$ 'dir. Ayrıntılı olarak, herhangi k sabiti için

(i) $\text{var}(X + k) = \text{var}(X)$ ve buradan $\sigma_{x+k} = \sigma_x$ dir.

(ii) $\text{var}(kX) = k^2 \text{var}(X)$ ve buradan $\sigma_{kX} = |k| \sigma_X$ dir.

Olasılık dağılım fonksiyonu (Cumulative Distribution Function, Probability Distribution Function)

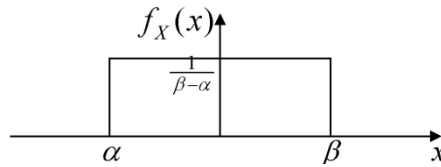
Olasılık dağılım fonksiyonu

Ayrık	sürekli
$F(x_k) = \sum_{k=1}^n f(x_k)$	$F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx \quad F(-\infty)=0, \quad F(\infty)=1$

Pratikte çok Kullanılan Olasılık dağılım fonksiyonları

Düzgün dağılım (Uniform Distribution)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



✓ cdf:

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(x) dx = \begin{cases} 0 & a \leq \alpha \\ \frac{a - \alpha}{\beta - \alpha} & \alpha < a < \beta \\ 1 & a \geq \beta \end{cases}$$

✓ Mean: $\mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \frac{\beta + \alpha}{2}$

✓ Variance:

✓ The second moment:

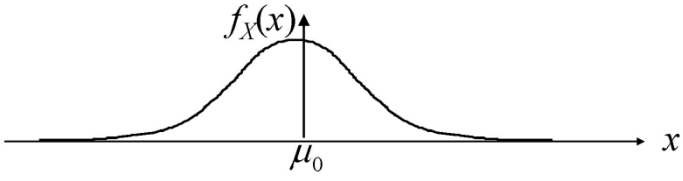
$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \frac{\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2}{3}$$

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - \mu_X^2$$

$$= \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

Normal Dağılım, Gauss dağılımı, (Gaussian (Normal) Distribution)

X sürekli rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi ise Normal (Gaussian) tipi denir.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right)$$


Bu tip olasılık dağılım fonksiyonuna normal dağılım denir.

$$X \sim N(\mu_0, \sigma^2)$$

şeklinde gösterilir. Burada μ_0 parametresi rasgele değişkenin beklenen değerini σ^2 parametresi ise Varyansı gösterir.

✓ Mean: $\mu_X = \mu_0$

✓ Variance: $\sigma_X^2 = \sigma_0^2$

✓ cdf: $F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(x)dx = 1 - \int_a^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right\} dx$

$$= 1 - \int_{\frac{a-\mu_0}{\sigma_0}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz = 1 - Q\left(\frac{a-\mu_0}{\sigma_0}\right)$$

$$Q(\alpha) \triangleq \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx$$

$$Q(\alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx$$

• $Q(\alpha)$ is a decreasing function of α .

• For $X \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$,

$$\Pr\{X > a\} = \int_a^{\infty} f_X(x)dx = \int_a^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right\} dx = Q\left(\frac{a-\mu_0}{\sigma_0}\right)$$

