

Tanımlar

Enerji Sinyali ve Güç Sinyali

Enerji Sinyali (Energy type signal)

Eğer bir sinyalin enerjisi

$$0 < E_g = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt < \infty$$

şartını sağlıyorsa(enerjisi sinirli ise) bu sinyale enerji sinyali denir.

Güç Sinyali (power-type signal)

Eğer bir sinyalin gücü

$$0 < P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt < \infty$$

şartını sağlıyorsa (gücü sinirli ise) bu sinyale güç sinyali denir.

Enerji ve Enerji Spektrumu

s(t) sinyalinin zaman domeninde ve frekans domeninde enerjisi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \quad (43)$$

$$E_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(w)|^2 dw \quad (44)$$

G(w): g(t) nin Furier dönüşümüdür.

$$G(w)=F[g(t)] \quad (45)$$

Enerji spektrum yoğunluğu (Energy spektral density, ESD)

$$\Psi_g(w)=|G(w)|^2 \quad (46)$$

$\Psi_g(w)$: Enerji spektrumu veya Enerji spektrum yoğunluğu, (ESD, Energy spektral density).

olarak adlandırılır. Enerji ve Enerji spektrum yoğunluğu arasında

$$E_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_g(w) dw = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_g(w) df$$

bağıntısı da vardır.

Parseval Teorem

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(w)|^2 df \quad (53)$$

Örnek Problem 432) $g(t)=e^{-at} u(t)$ dir. $g(t)$ nin Furier Dönüşümü , $G(w) = \frac{1}{jw + a}$ dir.

Parseval Teoreminin doğruluğunu $g(t)$ ve $G(w)$ üzerinde gösterin.

Çözüm: 43 ve 44 notu eşitliklerden

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2a}$$

$$E_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + a^2} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi a} \tan^{-1} \frac{\omega}{a} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2a}$$

Örnek Problem 434) $g(t)=e^{-at} u(t)$ dir. $g(t)$ nin Furier Dönüşümü , $G(w) = \frac{1}{jw + a}$ dir.

$g(t)$ işaretinin Enerji spektrum yoğunluğunu hesaplayın.

Çözüm:

$$\Psi_g(\omega) = |G(\omega)|^2 = \frac{1}{\omega^2 + a^2}$$

İşaret için gerekli bant Genişliği

Pek çok işaretin bant genişliği teorik olarak sonsuzdur. Gerçekte ise işaretin faydalı bant genişliği sonsuz değildir. İşaretin ihmal edilemeyecek bileşenleri B Hz gibi bir banttadır. Mesela işaret enerjisinin %95 ini içine alacak şekilde tasarım yapılır.

Örnek Problem 436) $g(t)=e^{-at} u(t)$ işaretinin enerjisinin %95 ini barındıran bant genişliği nedir.

Çözüm:

$$G(w) = \frac{1}{jw + a}, \quad |G(w)|^2 = \frac{1}{w^2 + a^2}$$

Örnek Problem 432) de $g(t)$ nin tüm enerjisi

$$E_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(w)|^2 dw = \frac{1}{2a}$$

olarak hesaplanmıştı. o halde

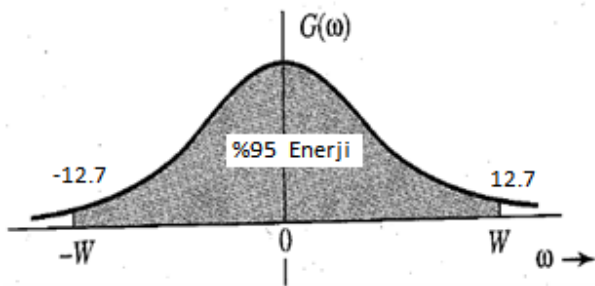
$$0.95 \frac{1}{2a} = \frac{1}{2\pi} \int_{w=-W}^{w=W} |G(w)|^2 dw$$

olacak şekilde W değerini bulmamız lazım.

$$\begin{aligned} \frac{0.95}{2a} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W \frac{d\omega}{\omega^2 + a^2} \\ &= \frac{1}{2\pi a} \tan^{-1} \frac{\omega}{a} \Big|_{-W}^W = \frac{1}{\pi a} \tan^{-1} \frac{W}{a} \end{aligned}$$

$$\frac{0.95\pi}{2} = \tan^{-1} \frac{W}{a} \Rightarrow W = 12.706a \text{ rad/s}$$

$g(t)=e^{-at} u(t)$ işaretinin enerjisinin %95'i $0 < W < 12.7$ rad/saniye frekans bandında bulunmaktadır. Enerjinin %5 ise $12.7 < W < \infty$ frekans aralığındadır.



Otocorrelasyon Fonksiyonu (Autocorrelation Function)

$$\psi_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t+\tau) dt$$

ifadesi Otocorrelasyon fonksiyonu olarak adlandırılır. Bu fonksiyon simetriktir yani

$$\psi_g(\tau) = \psi_g(-\tau)$$

$F[g(t)] = G(w)$, $F[\psi(t)] = \Psi(w)$ olmak üzere

$$\Psi(w) = |G(w)|^2$$

özellği vardır.

Söz ile ifade edelim:

Bir $g(t)$ işaretinin Otocorrelasyon fonksiyonunun Furier dönüşümü, $g(t)$ nin Furier dönüşümünün genliğinin karesidir. $|G(w)|^2$ ifadesi Enerji spektrum yoğunluğu olarak adlandırılır.

Örnek Problem 442) $g(t) = e^{-at} u(t)$ işaretinin Otocorrelasyon fonksiyonunu bulun. Bundan faydalananarak $g(t)$ nin enerji spektrum yoğunluğunu hesaplayın.

Çözüm:

$$g(t - \tau) = e^{-a(t - \tau)} u(t - \tau) \quad g(t - \tau) = e^{-a(t - \tau)} u(t - \tau)$$

Not: $g(t - \tau)$, $g(t)$ fonksiyonunun kadar sağa kaymış halidir.

Önce $\tau > 0$ halini inceleyelim.

$$g(t) = e^{-at} u(t)$$

$$g(t) = e^{-a(t - \tau)} u(t - \tau)$$

t

t

τ

$$g(t) = e^{-at} u(t)$$

t

$$g(t) = e^{-a(t - \tau)} u(t - \tau)$$

X

τ

t

$$g(t)g(t - \tau)$$

$g(t)g(t - \tau)$ çarpımında $-\infty < t < \tau$ arası sıfırdır.

τ

t

$$\psi_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t-\tau) dt = e^{a\tau} \int_{\tau}^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2a} e^{-a\tau}$$

$$\begin{aligned}\psi_g(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t) e^{-a(t-\tau)}u(t-\tau)dt \\ &= \int_{\tau}^{\infty} e^{-at} e^{-at} e^{a\tau} dt = e^{a\tau} \int_{\tau}^{\infty} e^{-2at} dt = e^{a\tau} \left. \frac{1}{-2a} e^{-2at} \right|_{\tau}^{\infty} = \frac{e^{-a\tau}}{2a}\end{aligned}$$

$\tau < 0$ hali için benzer işlemler geçerlidir. Benzer işlemleri yapabiliriz. Ancak

$$\psi_g(-\tau) = \psi_g(\tau)$$

şartı geçerli olduğundan

$$\text{hem } \tau < 0, \text{ hem } \tau > 0 \text{ için } \psi_g(\tau) = \frac{e^{-a|\tau|}}{2a} \text{ yazabiliriz.}$$

$h(t) = e^{-a|t|}$ fonksiyonunun Furier Dönüşümü $H(w) = \frac{2a}{w^2 + a^2}$ olduğunu biliyoruz.

$$\text{O halde } \psi_g(\tau) = \frac{e^{-a|\tau|}}{2a} \text{ fonksiyonunun Furier dönüşümü de } \Psi_g(w) = \frac{1}{w^2 + a^2}$$

olacaktır.

Dolayısıyla $\Psi_g(w) = |G(w)|^2$ bağıntısını da doğrulamış oluyoruz.

Lineer sistemlerde Enerji Spektrum yoğunluğu

$$\begin{array}{ccc} x(t) & H(w) & y(t) \\ X(w) & & Y(w) \end{array}$$

Lineer Sistemlerde

$$Y(w) = H(w)X(w)$$

bağıntısı geçerlidir.

$$|Y(w)| = |H(w)| |X(w)| \quad |Y(w)|^2 = |H(w)|^2 |X(w)|^2$$

$|X(w)|^2$: Girişin Enerji spektrum yoğunluğu

$|Y(w)|^2$: çıkışın Enerji spektrum yoğunluğu

$H(w)$: Sistem Transfer fonksiyonu

Güç Spektrum yoğunluğu (Power spectral Density)

Sinirli T(t) işaretinin gücü için

$$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{gT}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G_T(\omega)|^2 d\omega \right]$$

olarak verilir.

$$S_g(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G_T(\omega)|^2}{T} \quad (82)$$

ifadesi güç spektrum yoğunluğu olarak tanımlanır.

İşaretin gücü

$$P_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_g(\omega) d\omega \quad (84)$$

şeklinde gelir.

Güç işaretinin Otocorrelasyon Fonksiyonu

g(t) işaretinin Otocorrelasyon fonksiyonu

$$\mathcal{R}_g(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t)g(t+\tau) dt$$

şeklinde tanımlanır. Otocorrelasyon fonksiyonu

$$\mathcal{R}_g(-\tau) = \mathcal{R}_g(\tau)$$

$$\mathcal{R}_g(\tau) \Longleftrightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G_T(\omega)|^2}{T} = S_g(\omega)$$

Özelliğini sağlar.

$G_T(\omega)$ g(t) nin Fourier dönüşümü.

$S_g(\omega)$: Güç spektrum yoğunluğu

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt$$

$$\psi_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t+\tau) dt$$

$$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{gT}}{T}$$

$$\mathcal{R}_g(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t)g(t+\tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\psi_{gT}(\tau)}{T}$$

$$\Psi_g(\omega) = |G(\omega)|^2$$

$$\psi_g(\tau) \Longleftrightarrow \Psi_g(\omega)$$

$$E_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_g(\omega) d\omega$$

$$S_g(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G_T(\omega)|^2}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Psi_{gT}(\omega)}{T}$$

$$\mathcal{R}_g(\tau) \Longleftrightarrow S_g(\omega)$$

$$P_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_g(\omega) d\omega$$

Lineer sistemlerde Güç Spektrum yoğunluğu

$S_g(\omega)$: Girişin Güç spektrum yoğunluğu

$S_y(\omega)$: çıkışın Güç spektrum yoğunluğu

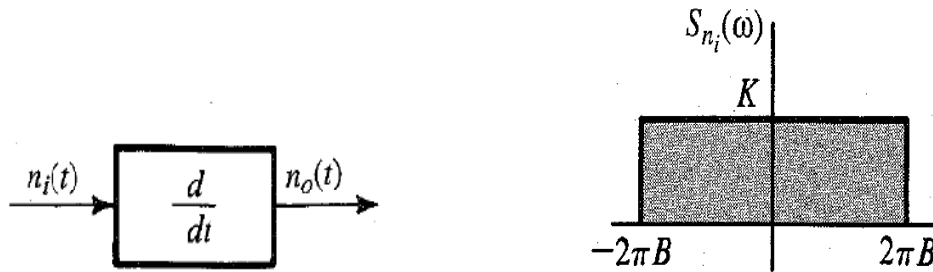
$H(\omega)$: Sistem Transfer fonksiyonu

olmak üzere

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_g(\omega) \quad (92)$$

bağıntısı geçerlidir.

Örnek Problem 448) $n_i(t)$ gürültü sinyalinin, PSD (power spektral density) şekilde gösterildiği gibidir. Bu gürültü sinyali ideal türev alıcı(differentiator) devreye uygulanıyor. Çıkış gücünü ve Çıkış gücünün güç spektrum yoğunluğunu hesaplayın.



Çözüm:

İdeal türev alıcı devrenin transfer fonksiyonu $H(\omega) = j\omega$ dir.

$S_{ni}(\omega)$: Girişin Güç spektrum yoğunluğu

$S_{no}(\omega)$: Çıkışın Güç spektrum yoğunluğu

(90) notu eşitliğe göre

$$S_{n0}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{ni}(\omega) = |\omega|^2 K = \omega^2 K$$

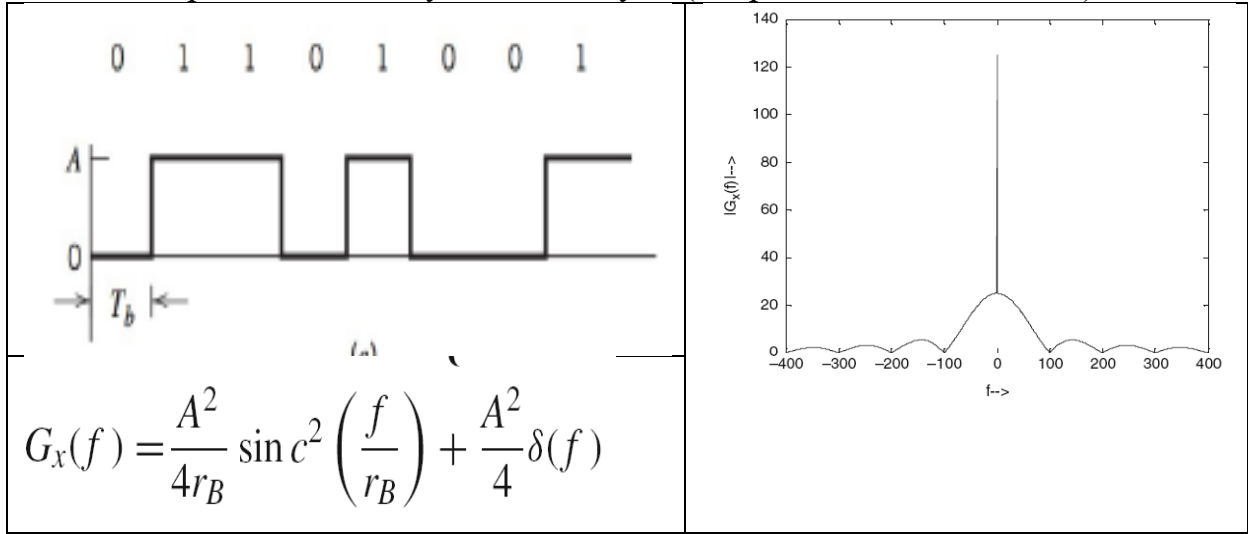
(84) notu eşitliğe göre.

$$P_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_g(w) dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} w^2 K dw = \frac{8\pi^2 B^3 K}{3}$$

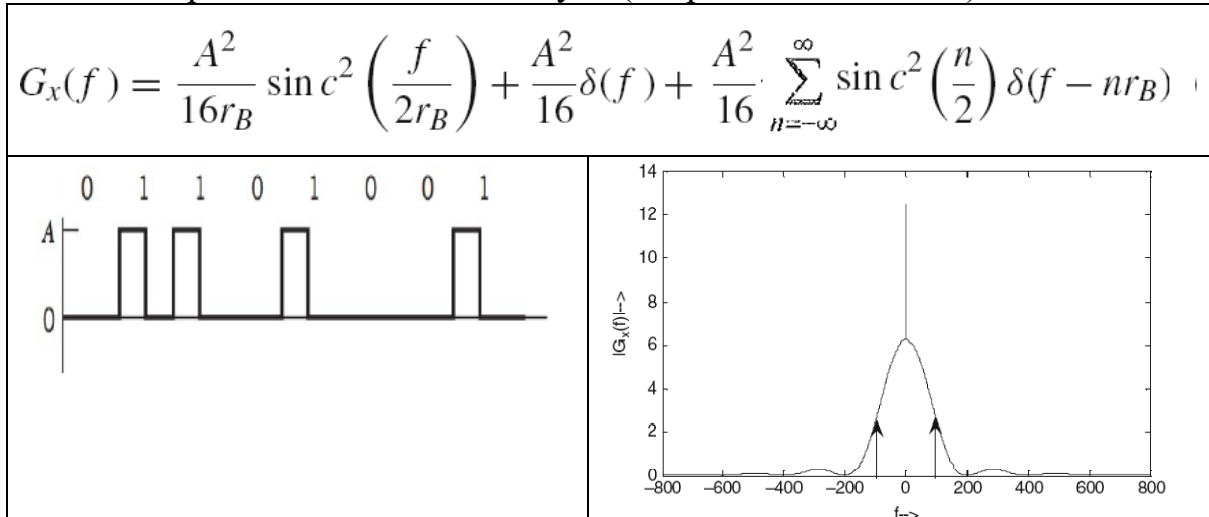
Hat Kodlamasında Kullanılan Sinyallerin Güç spektrum yoğunluğu (power spektrum density, PSD)

Hat kodları önceki derslerde anlatılmıştı. Burada bu hat kodlarının güç spektrum yoğunlukları verilmiştir. Güç spektrum yoğunluğu formüllerinin elde edilişi referans kitaplarda mevcuttur. Burada sonuçlar ve grafikler verilmiştir.

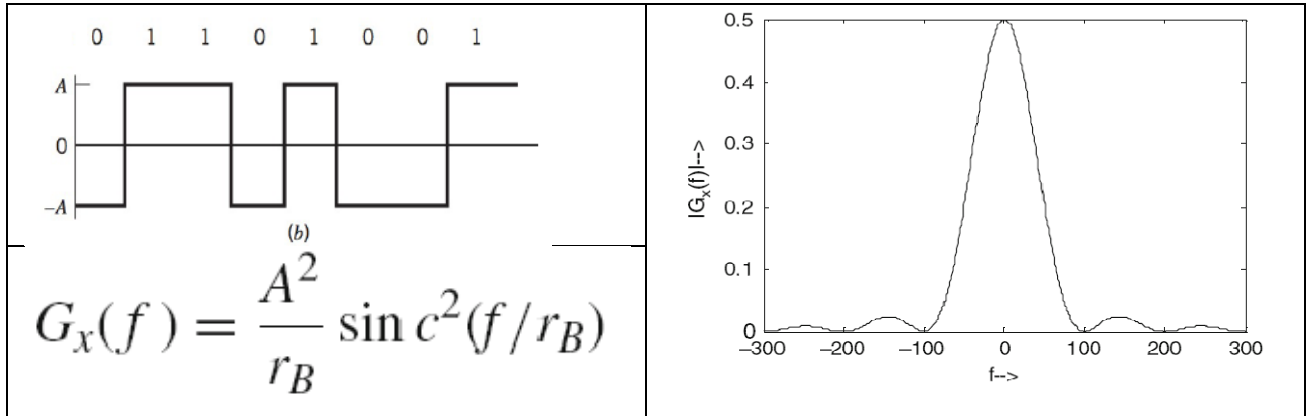
1. Tek kutuplu sıfıra dönmeyen darbe sinyali (Unipolar nonreturn to zero)



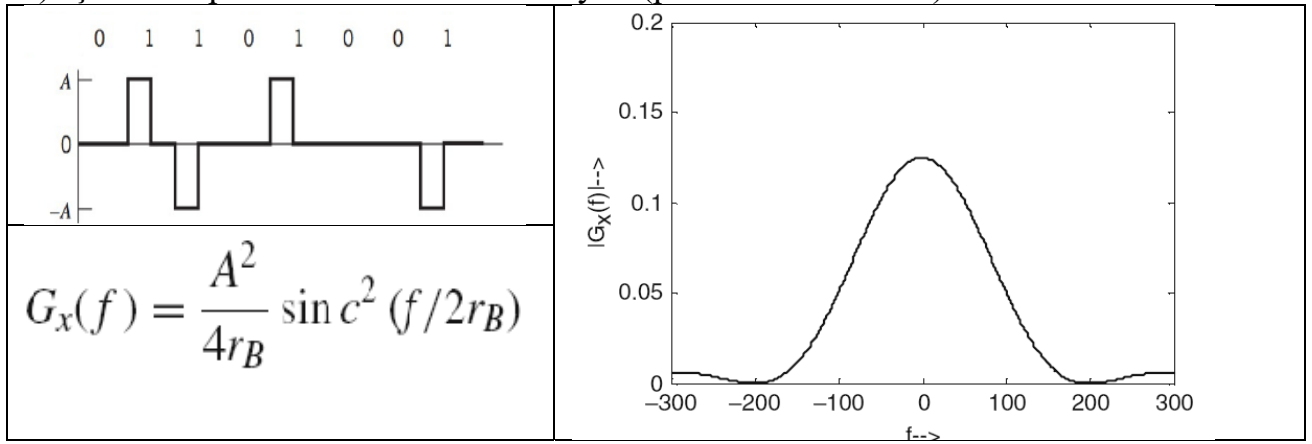
2. Tek kutuplu sıfıra dönen darbe sinyali (Unipolar return to zero)



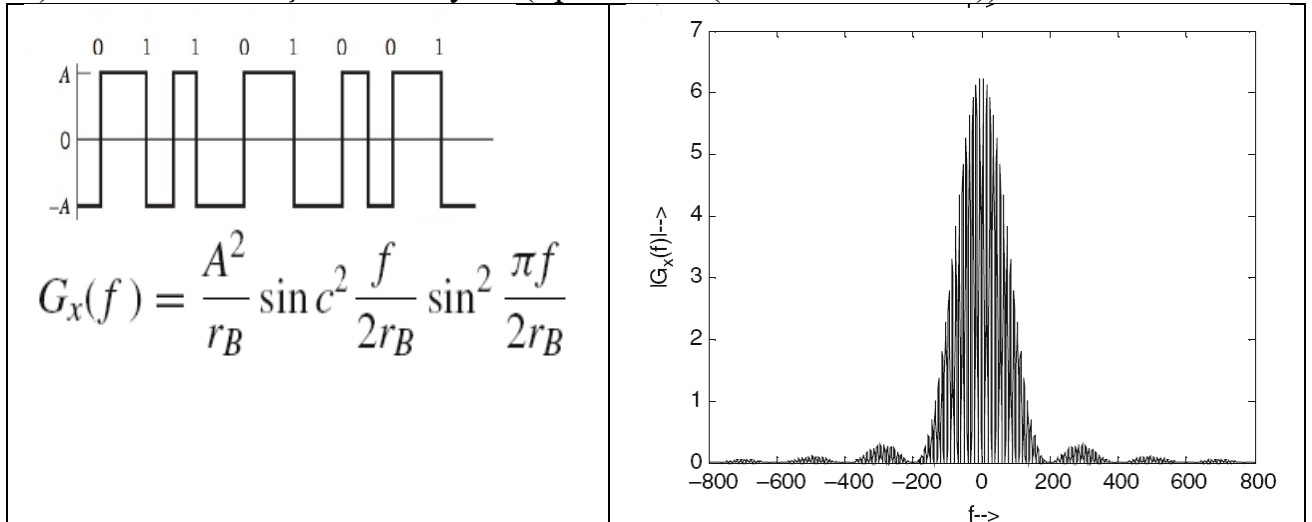
3) Çift kutuplu sıfıra dönmeyen darbe sinyali (polar nonreturn to zero)



4) Çift kutuplu sıfıra dönen darbe sinyali (polar return to zero)



5) Faz Kodlanmış darbe sinyali. (Split-Phase (Manchester Code))



Güç spektrum yoğunluğu (power spektrum density, PSD) grafikleri bize sunu anlatır: Bu ikili (binary) sinyal darbelerini göndereceğimiz haberleşme hattının sağlaması gereken özelliklerini gösterir.

- 1) Tek kutuplu sıfıra dönmeyen ve tek kutuplu sıfıra dönen darbe sinyalleri impulslar içerir. Bu impulslar karşı tarafa iletilmezse sinyal şekli bozulur.
- 2) Sinyal darbelerinin hangi frekanslarda daha güçlü olduğunu gösterir. Bu da bize haberleşme hattının hangi frekansları iyi iletmesi gerektiği hakkında bilgi verir. Haberleşme hattı bu frekansları taşımaya elverişli değilse sinyalimiz bozulur.
- 3) PSD Haberleşme hattındaki gürültüyü yenmek için bize fikir verir.