Frekans Örnekleme Metodu ile FIR Filtre Tasarımı

(Vinay K., Digital Signal Processing Using Matlab_ A Problem Solving Companion)

$H_d(e^{jw})$ ideal filtre fonksiyonunu $w=2\pi k/N$ aralıklarla N noktada örnekleyelim.

$$H[k] = H_d(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}}, \qquad k = 0, \ldots, N-1,$$

$|H_d(e^{jw})|$ $\angle H_d(e^{jw})$

w_1 w_2 w_3 w_{N-1} w

w_1 w_2 w_3 w_{N-1} w

H[k] nin ters Furier dönüşümünü alalım.

$$h[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H[k]e^{j2\pi nk/N}. \qquad (43)$$

Elde ettiğimiz bu h(n) filtre katsayılarıdır. (43) deki h(n) nin Z dönüşümünü alalım.

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k-0}^{N-1} H[k]e^{j2\pi nk/N}\right]z^{-n}$$

Iki toplam yer değiştirebilir.

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H[k]\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi nk/N}z^{-n}$$

ic toplamda

$$1+ a + a^2 + a^3 + \ldots\ldots\ldots + a^{N-1} = \sum_{k=0}^{N-1} a^k = \frac{1-a^N}{1-a}$$

bağıntısını kullanalım. $a=(e^{j2\pi k/N} z^{-1})$ gibi düşünelim.

$$a^N=(e^{j2\pi k/N} z^{-1})^N=(e^{j2\pi k /N})^N (z^{-1})^N = e^{j2\pi k} z^{-N} =1\, z^{-N}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] \left[\frac{1 - z^{-N}}{1 - e^{j2\pi k/N} z^{-1}} \right]$$

H(z) nin frekans spektrumu $H(z)\big|_{z=e^{jw}} = H(e^{jw})$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H[k]}{1 - e^{j2\pi k/N} e^{-j\omega}}.$$

0-2π aralığını N parçaya bölelim. H(0), H(1), H(2),..H(k)….H(N-1)

Ayrik Furier dönüşümünün merkeze göre Conjugate-simetri özelliğinden

$$H(k) = H\left(e^{j2\pi k/M}\right) = \begin{cases} H(0), & k = 0 \\ H^*(M-k), & k = 1, \ldots, M-1 \end{cases}$$

olacağı açıktır. $H(k)=H(e^{jw})$ nin ters Furier dönüşümü h(n), birim impuls cevabıdır.

$$F^{-1}[H(k)]=h(n)$$

M nin tek sayı, cift sayı olmasına göre h(n) deki terimlerin simetri veya tek simetri olması durumuna göre filtrenin karakteristiği değişir.

Özel Genlik Fonksiyonu $H_r(w)$

$$H(e^{j\omega}) = H_r(\omega) e^{j(\beta - \alpha\omega)}; \quad \beta = \pm\frac{\pi}{2}, \alpha = \frac{M-1}{2}$$

Filtre tasarımında kolaylık için aşağıdaki tanımlar yapılmıştır.

$$H(e^{jw}) = H_r(w)\, e^{j\angle H(e^{jw})}$$

Burada $H_r(e^{jw})$ özel olarak tanımlanmış genlik fonksiyonudur.

Bir kompleks sayı $3+4j=|3+4j|e^{j\angle(3+4j)}=5e^{j53.1}$ şeklinde yazılır.

Bir kompleks fonksiyon da benzer şekilde $H(w)=|H(w)|\ e^{j\angle H(w)}$ şeklinde yazılır.

$H(w)= jw+5= \sqrt{w^2+25}\ e^{j\arg\tan(w/5)}$, $\sqrt{w^2+25}$ genlik, $\arg\tan(w/5)$ acidir.

$H(w)=\cos(w)e^{j(w+\theta)}$, olsa $|H(w)|= |\cos(w)|$, $\angle H(w)= w+\theta$ şeklinde yazarsak ve

$|\cos(w)|$ genliktir. $w+\theta$ acidir

dersek hatalı olur. cos(w) nin negatif olduğu zamanlardaki – işaretini faza eklememiz lazım. Bu yüzden

$$H(e^{jw})=H_r(w)\ e^{j\angle H(e^{jw})}$$

tanımı yapılmıştır. $H_r(w)$ **özel genlik fonksiyonu**dur. $H_r(w)>0$oldugu yerlerde

$$|H_r(w)|=|H(e^{jw})|$$

olur. Ancak $H_r(w)<0$ ise

$$|H_r(w)|\neq|H(e^{jw})|$$

Filtre Tipleri

Aşağıdaki tanımlar ve matematik ifadelerin çıkarılışı referans kitapda verilmiştir. Biz sonuçları yorumlayacağız.

h(n)=h(M-1-n) (simetrik)	M tek, Type 1,	
	M cift, Type 2	$H(e^{j\pi})=0$, yüksek geçiren ve band söndüren olarak filtre olarak kullanılamaz
h(n)=-h(M-1-n) (tek simetrik)	M tek, Type 3,	$H(e^{j0})=0$, $H(e^{j\pi})=0$, alçak geçiren ve yüksek geçiren filtre olarak kullanılamaz
	M cift, Type 4	$H(e^{j0})=0$, alçak geçiren filtre olarak kullanılamaz

$$H(k)=H_r\left(\frac{2\pi k}{M}\right)e^{j\angle H(k)}$$

$$H_r\left(\frac{2\pi k}{M}\right)=\begin{cases}H_r(0), & k=0\\ H_r\left(\frac{2\pi(M-k)}{M}\right), & k=1,\ldots,M-1\end{cases}$$

$$\angle H(k)=\begin{cases} -\left(\frac{M-1}{2}\right)\left(\frac{2\pi k}{M}\right), & k=0,\ldots,\left\lfloor\frac{M-1}{2}\right\rfloor \\ +\left(\frac{M-1}{2}\right)\frac{2\pi}{M}(M-k), & k=\left\lfloor\frac{M-1}{2}\right\rfloor+1,\ldots,M-1 \end{cases}$$	Type 1 Type 2 (7.37)
$$\angle H(k)=\begin{cases} \left(\pm\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{M-1}{2}\right)\left(\frac{2\pi k}{M}\right), & k=0,\ldots,\left\lfloor\frac{M-1}{2}\right\rfloor \\ -\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{M-1}{2}\right)\frac{2\pi}{M}(M-k), & \\ & k=\left\lfloor\frac{M-1}{2}\right\rfloor+1,\ldots,M-1 \end{cases}$$	Type 3 Type 4 (7.37)

Filtre Tasarım Algoritması

1) M filtre uzunluğunu seç. Filtre tipini (Type 1, Type 2, Type 3, Type 4) belirle.

2) $H(e^{jw})= H(e^{j2\pi k/M})$, fonksiyonunun örnek değerlerini ver. (hangi frekansda genlik ve faz ne olacak), (geçirme ve söndürme bandını burada ayarla.)

3) $F^{-1}[H(k)]=h(n)$ eşitliğince $H(e^{j2\pi k/M})$ nin ters Furier dönüşümünü al ve h(n) yi bul.

4) h(n) aradığımız filtre katsayılarıdır.

Örnek Problem 714) $w_p=0.2\pi$ ve $w_s=0.3\pi$ olan alçak geçiren bir filtre tasarlayın. M=20 alın.

Çözüm: M=20,

M cift sayı $\longrightarrow$ Type 2, veya Type 4 olabilir.

Type 4: alçak geçiren filtre icin uygun değil. O halde Type 2 olacak.

0-2 π aralığını 20 parçaya bölersek. 0- π aralığını 10 parçaya bölmemiz gerekir.

[0 0.1π 0.2π 0.3π 0.4π …. 0.9 π π]

0.2π geçirme bandında 0.3π söndürme bandında olacak. Bu durumda alçak geçiren filtre karakteristiği

0	0.1π	0.2π	0.3π	0.4π	0.5π	0.6π	0.7π	0.8π	0.9π	π
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

şeklinde olacaktir. π-2π arası π ye göre simetrik olacaktir. (Simetrik olmazsa h(n) reel olmaz).

0	0.1 π	0.2 π	0.3 π	0.4 π	0.5 π	0.6 π	0.7 π	0.8 π	0.9 π	π	1.1 π	1.2 π	1.3 π	1.4 π	1.5 π	1.6 π	1.7 π	1.8 π	1.9 π
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	**[0]**	0	0	0	0	0	0	0	1	1

O halde $H_r(k)$=[1 1 1 0 0 0 ….1 1], ve (7.37) formülüne göre

$$\angle H(k) = \begin{cases} -9.5\dfrac{2\pi}{20}k = -0.95\pi k, & 0 \le k \le 9 \\ +0.95\pi(20-k), & 10 \le k \le 19 \end{cases}$$

$H(k)= H_r(k)\, e^{j\angle H(k)}$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$H_r(k)$	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	0	0	0	0	0	0	1	1
$\angle H(k)$	0	-0.95π	-1.9π	…	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1.9π	0.95π
$H(k)$	1	-0.99 - 0.16i	0.95+ 0.31i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.95- 0.31i	-0.99 + 0.16i

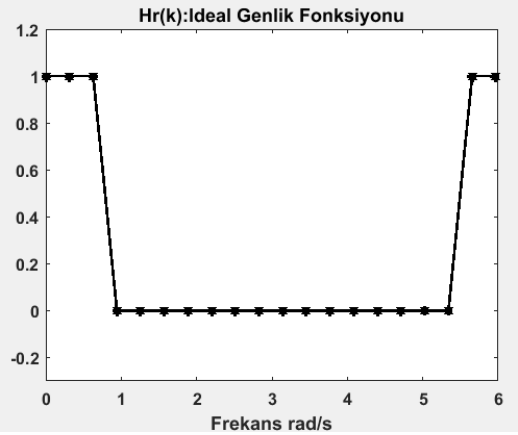
H(k) lar hesaplanır. Ters Furier dönüşümü ile h(n) hesaplanır. Bilgisayar yardımıyla hesaplanan h(n) değerleri aşağıdadır.

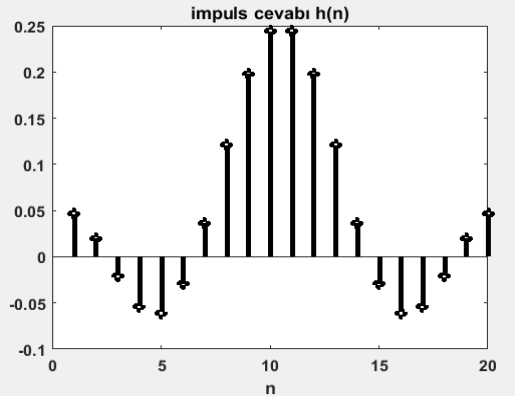
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h(n)	0.046	0.02	-0.021	-0.054	-0.061	-0.029	0.037	0.121	0.198	0.244

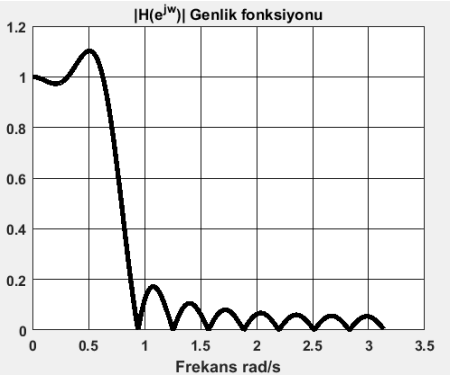
n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
h(n)	0.244	0.198	0.121	0.037	-0.029	-0.061	-0.054	-0.021	0.02	0.046

Bulduğumuz h(n) nin z dönüşümünü alıp $H(e^{jw})$ spektrumunu çizdirelim.

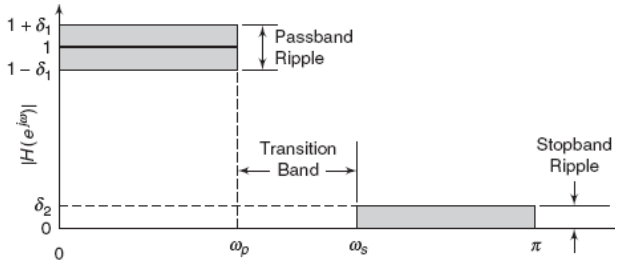
$$H(e^{jw})=h(0)+ h(1)e^{jw}+ h(2)e^{2jw} + h(3)e^{3jw} +\ldots..+ h(19)e^{19jw}$$

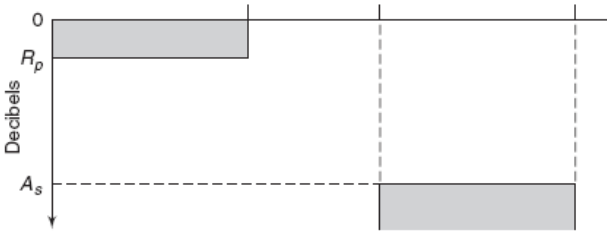






Önceki bolümden hatırlayacağımız üzere





$$R_p = -20\log_{10}\frac{1-\delta_1}{1+\delta_1} \qquad A_s = -20\log_{10}\frac{\delta_2}{1+\delta_1} > 0$$

Genlik fonksiyonundan görüldüğü gibi $\delta_1 \approx 0.1$, $\delta_2 \approx 0.2$,

ve $Rp=-20\log\frac{1-\delta_1}{1+\delta_1}=1.7dB$, $As=-20\log\frac{\delta_2}{1+\delta_1}=14.8dB$

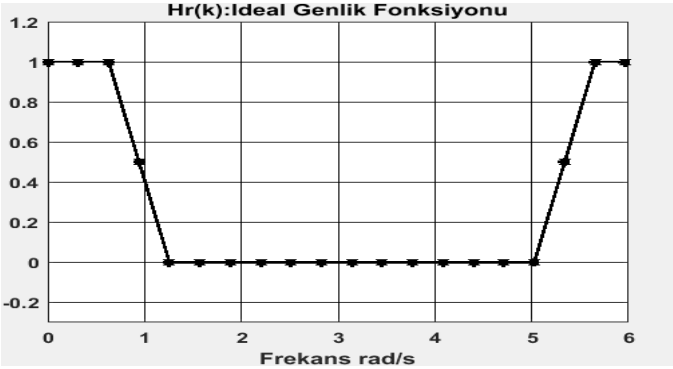
Rp=1.7dB ve As=14.8dB değerleri pratik kullanımda kabul edilemeyecek degerlerdir.

δ_1 ve δ_2 daha küçük olmalı. Bu sebeple biz daha değişik filtre tasarım yöntemleri aramalıyız.

Not: δ_1 küçüldükçe Rp küçülür. δ_2 küçüldükçe As mutlak değer olarak buyur.

Optimum FIR Filtre Tasarımı

Yukarıdaki örnekte görüldüğü gibi sadece geçirme ve söndürme bantlarındaki değerleri vermek bizim beklediğimiz Rp ve As değerlerini sağlamıyor. Bu durumda geçiş bandında da bazı değerler vererek filtremizi geliştirmeye çalısalım. İdeal filtre genlik karakteristiğini aşağıdaki şekilde tasarlayalım.



Örnek Problem 715) $w_p=0.2\pi$ ve $w_s=0.3\pi$ olan alçak geçiren bir filtre tasarlayın. geçiş bandında bir örnek alın. M=40 alın.

Çözüm: M=40,

M cift sayı $\longrightarrow$ Type 2, veya Type 4 olabilir.

Type 4: alçak geçiren filtre için uygun değil. O halde Type 2 olacak.

0-2 π aralığını 40 parçaya bölersek. 0- π aralığını 20 parçaya bölmemiz gerekir.

[0 0.05π 0.1π 0.15π 0.2π …. 0.95π π]

0.2π geçirme bandında 0.3π söndürme bandında olacak. Bu durumda alçak geçiren filtre karakteristiği

0	0.05 π	0.1 π	0.15 π	0.2 π	0.25 π	0.3 π	… .	…. .	1.65 π	1.7 π	1.75 π	1.8 π	1.85 π	1.9 π	1.95 π
1	1	1	1	1	T1	0	0	0	0	0	T1	1	1	1	1

şeklinde olacaktir. π-2π arası π ye göre simetrik olacaktir.

O halde $H_r(k)$=[1 1 1 1 1 T1 0 0 0 …. 0 0 0 T1 1 1 1 1], ve (7.37) formülüne göre

Burada soru T1 ne olmalidir ki δ_1 ve δ_2 yeteri kadar küçük olsunlar.

α=(40-1)/2=19.5

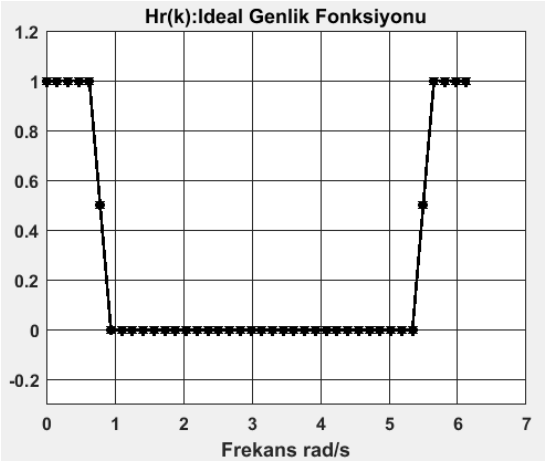
$$\angle H(k) = \begin{cases} -19.5\dfrac{2\pi}{40}k = -0.975\pi k, & 0 \le k \le 19 \\ +0.975\pi\,(40-k), & 20 \le k \le 39 \end{cases}$$

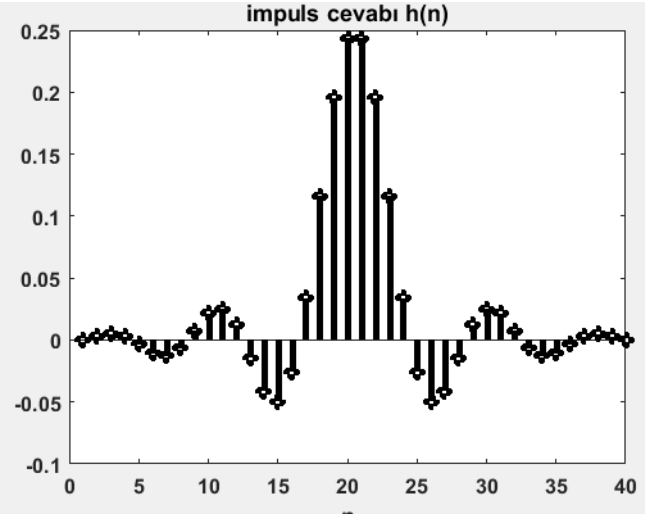
T1 re 0 ile 1 arasında çeşitli değerler vererek δ_1 ve δ_2 değerlerini azaltmak istiyoruz.

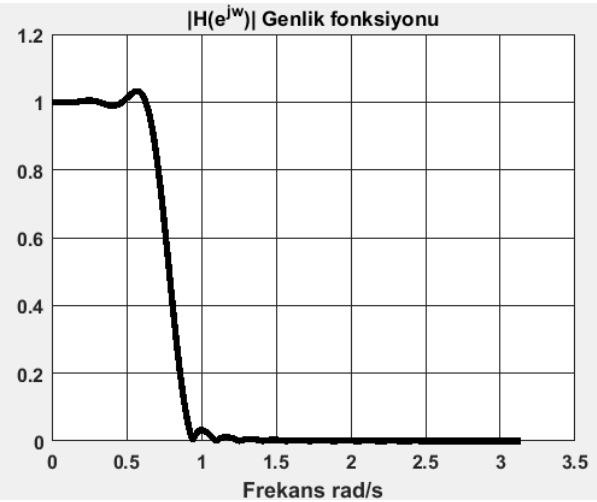
(Not: δ_1 küçüldükçe Rp küçülür. δ_2 küçüldükçe As mutlak değer olarak büyür.)

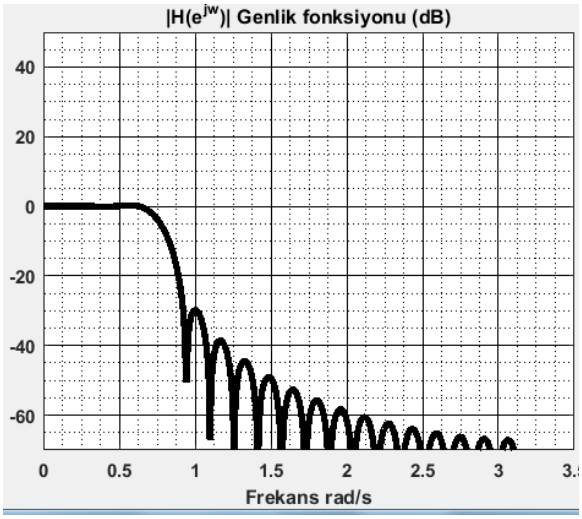
Problem 714 deki metodları kullanarak T1=0.5 için hesaplanan değerler aşağıdaki gösterilmiştir.

T1=0.5



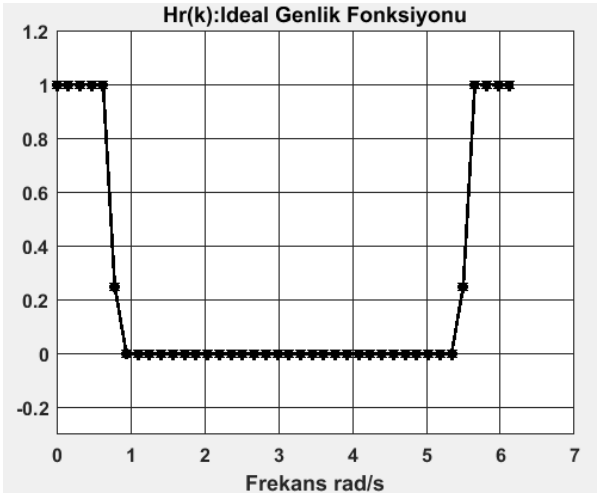


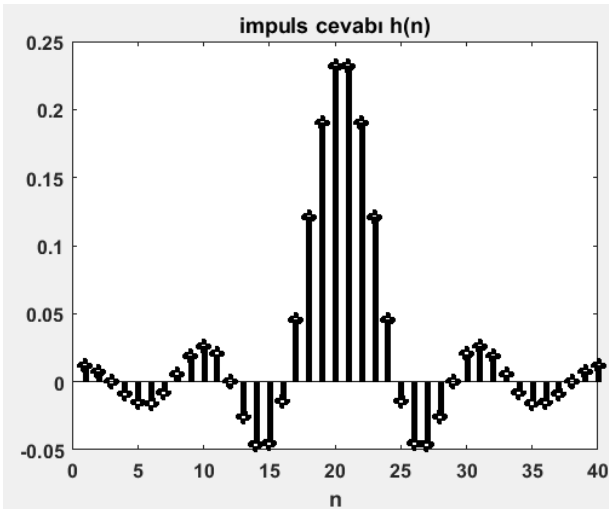


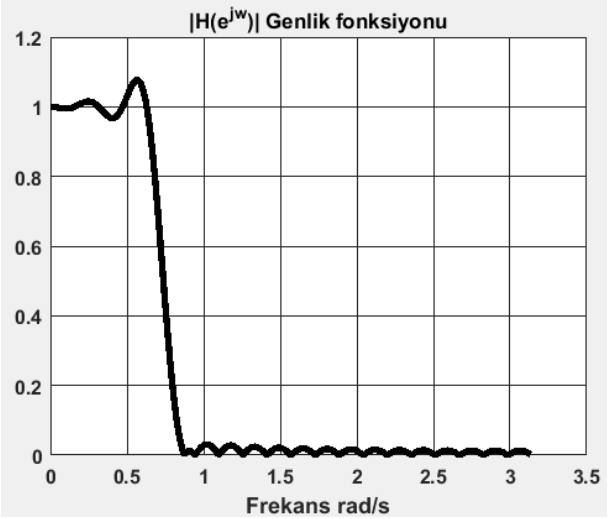


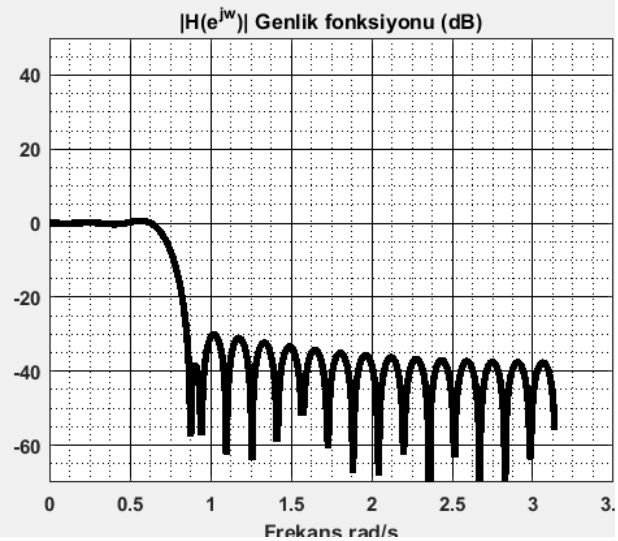
Problem 714 deki metodları kullanarak T1=0.25 için hesaplanan değerler aşağıdaki gösterilmiştir.

T1=0.25

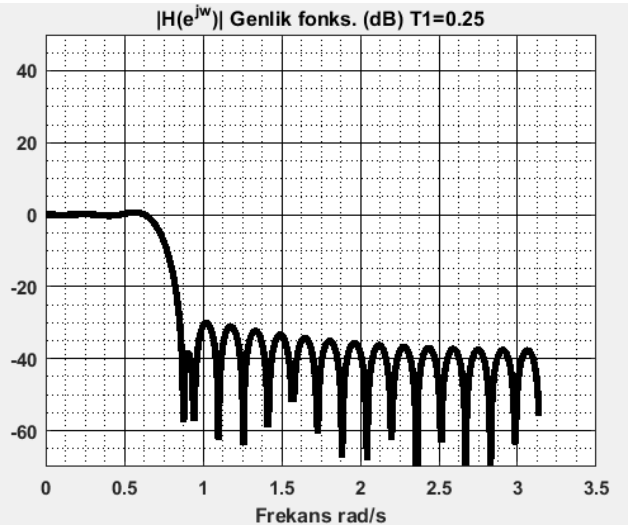


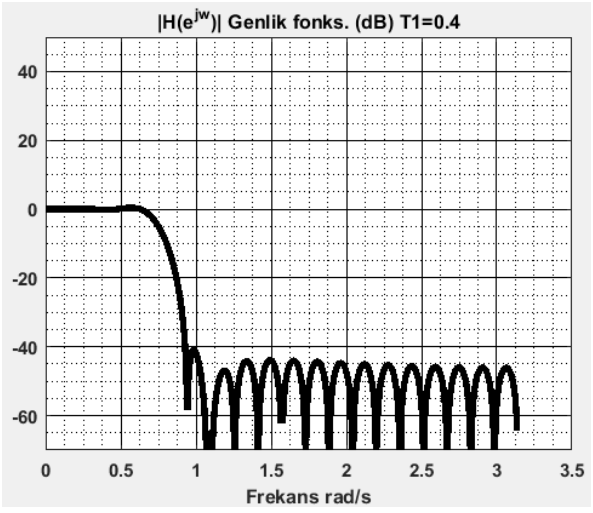


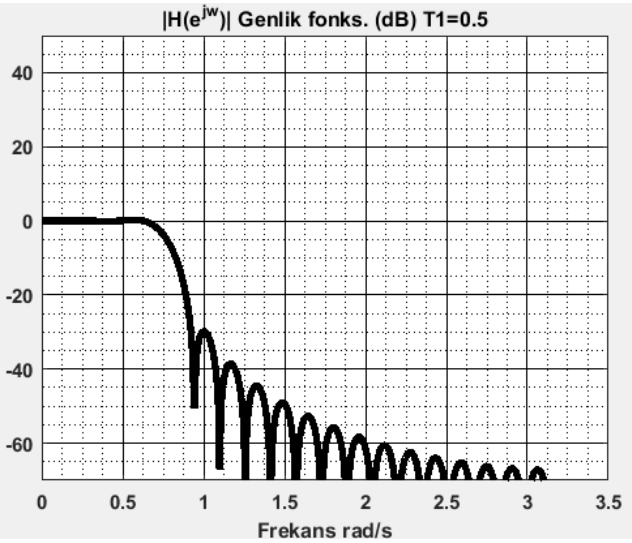


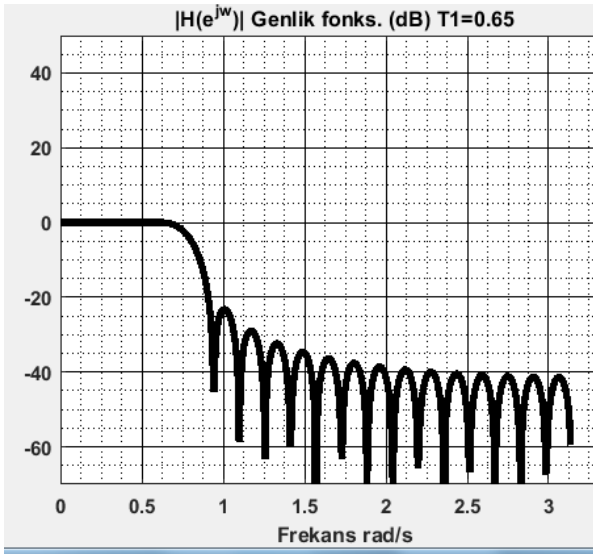


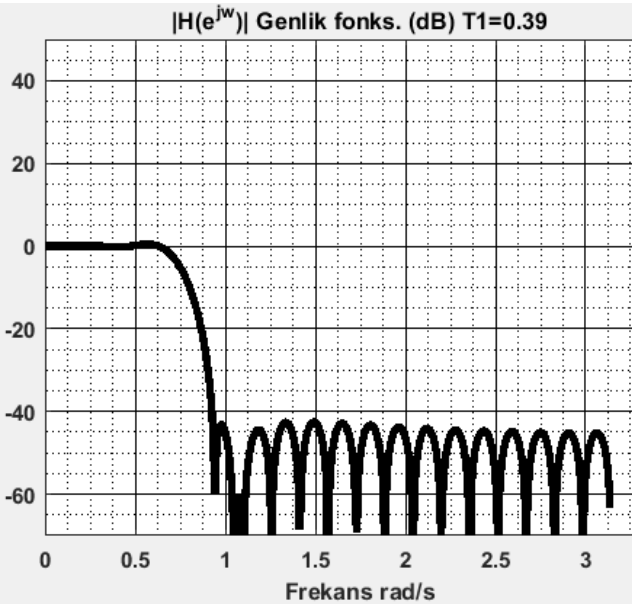
Aşağıda değişik T1 değerleri için genlik fonksiyonu çizilmiştir











Grafiklerden görüldüğü gibi As nin en büyük olduğu değer (δ_2 nin en küçük olduğu değer) T1=0.39 da elde edilmiştir. Bulduğumuz T1 optimum değerdir. Biz T1 =0.39 değerini bilgisayar yardımıyla bir çeşit deneme-yanılma yoluyla bulduk. Teorik olarak T1=0.39 değerini bulabileceğimiz matematik yöntemlere burada girmeyeceğiz.

Örnek Problem 716) $w_p=0.2\pi$ ve $w_s=0.3\pi$ olan alçak geçiren bir filtre tasarlayın. geçiş bandında iki örnek alın. M=60 alın.

Çözüm: M=60, Type 2 filter.

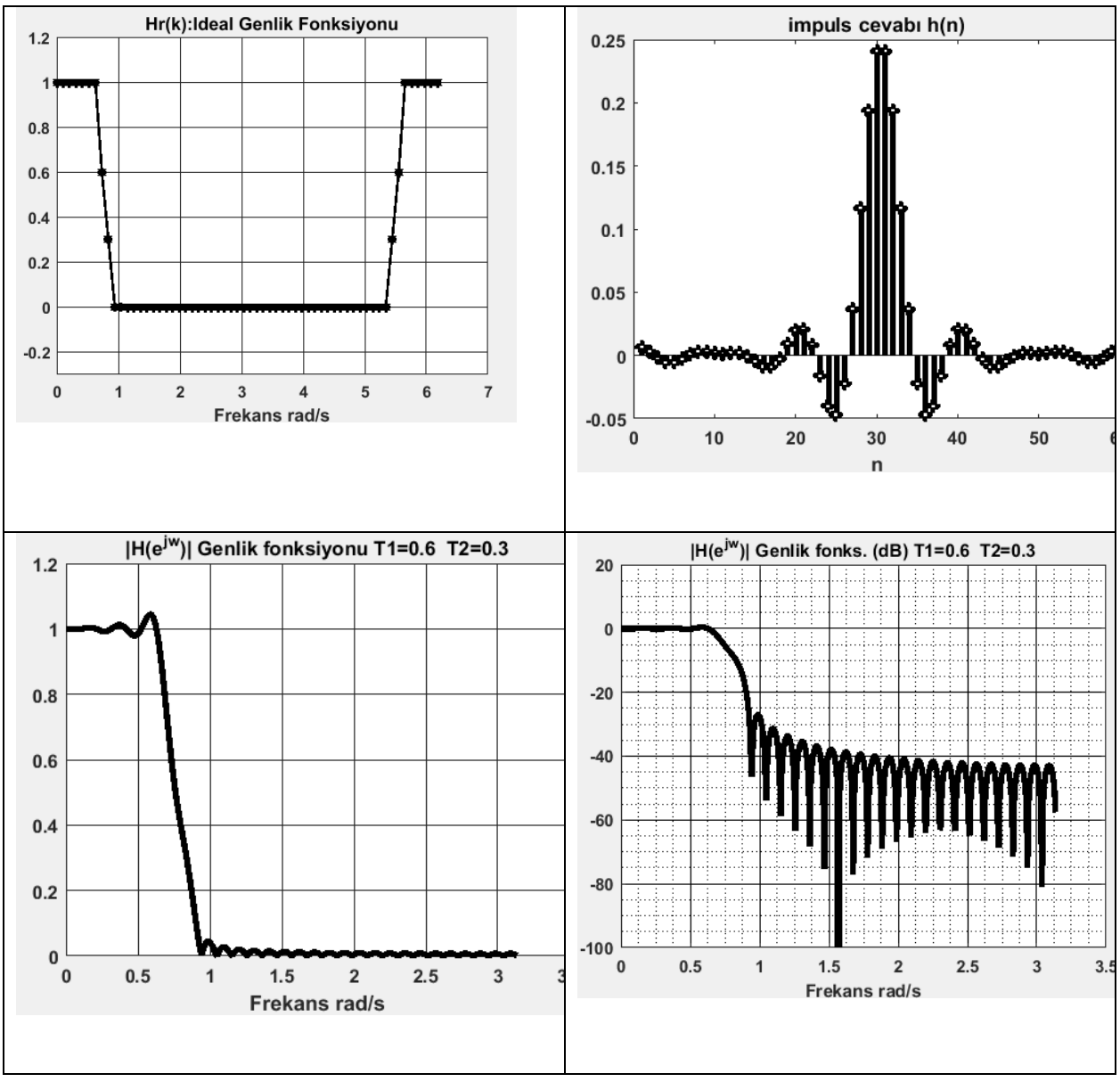
0-2π aralığını 60 parçaya bölelim

0	0.1π/3	0.2π/3	0.3π/3	0.4π/3	0.5π/3	0.6π/3	0.7π/3	0.8π/3	0.3π	π/3	.....	....	.....
1	1	1	1	1	1	1	T1	T2	0	0	0	0	0

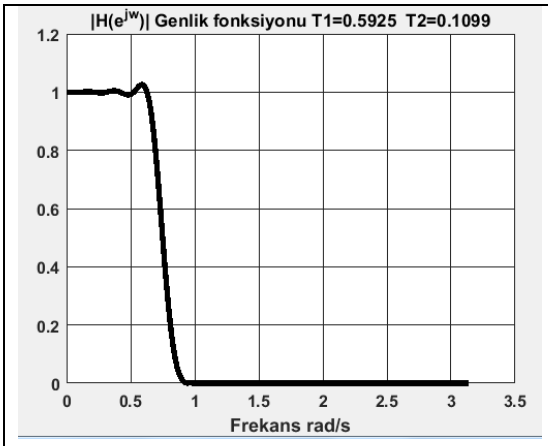
.....	.....	.....	.....	.....	.....	5.2π/3	5.3π/3	5.4π/3	5.5π/3	5.6π/3	5.7π/3	5.8π/3	5.9π/3
0	0	0	0	0	0	T2	T1	1	1	1	1	1	1

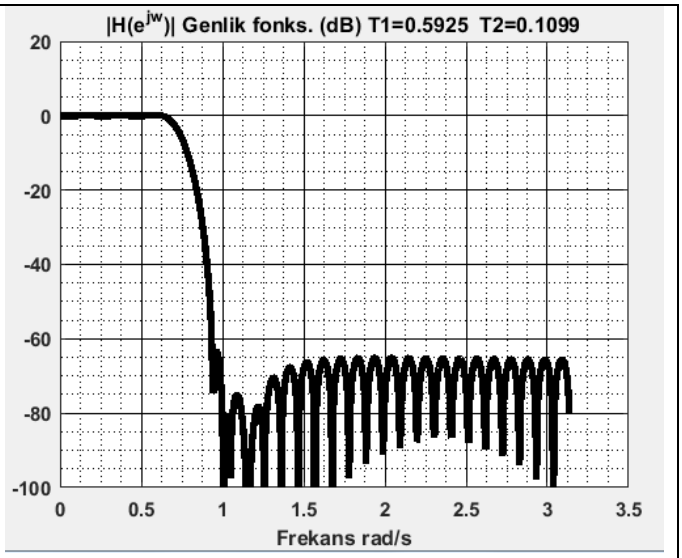
O halde $H_r(k)$=[1 1 1 1 1 1 1 T1 T2 0 0 0 …. 0 0 0 T1 T2 1 1 1 1 1 1],

α=(60-1)/2=29.5, T1=0.6, T2=0.3 alarak çizimleri yapalım.



T1=0.5925; T2=0.1099; alarak çizimleri yapalım.





Örnek Problem 717) Bant geçiren filtre tasarlayın. M=40.

lower stopband edge: $\omega_{1s} = 0.2\pi$, $A_s = 60$ dB

lower passband edge: $\omega_{1p} = 0.35\pi$, $R_p = 1$ dB

upper passband edge: $\omega_{2p} = 0.65\pi$ $R_p = 1$ dB

upper stopband edge: $\omega_{2s} = 0.8\pi$ $A_s = 60$ dB

Çözüm

0-2π aralığını 40 parçaya bölelim

0-0.2π arası söndürme bandı
0.2π söndürme bandında 0.35π geçirme bandında olacak.
0.35 π -0.65 arası geçirme bandı
0.65π geçirme bandında 0.8π söndürme bandında olacak.
0.8π- π arası söndürme bandı.
π-2π arası 0-π arasının simetriği
Bu durumda bant geçiren filtre karakteristiği

0	0.05π	0.1π	0.15π	0.2π	0.25π	0.3π	0.35π	0.4π	0.45π	0.5π	0.55π	0.6π	0.65π	0.7π	0.75 π	0.8π
0	0	0	0	0	T1	T2	1	1	1	1	1	1	1	T2	T1	0

0.85π	0.9π	0.95 π	π
0	0	0	0

5 sıfır-T1,T2,7 bir,T2,T1,4 sıfır, π

ters çevirelim→ π, 4 sıfır,T1,T2, 7 bir,T2,T1,4 sıfır

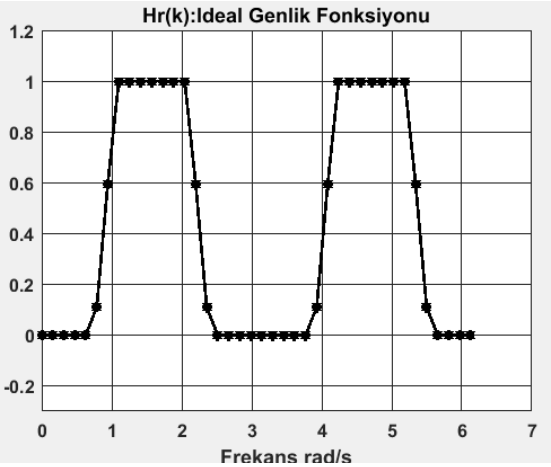
(basdaki sıfır simetriye dahil değil, Ayrik Furier dönüşümü özelliğinden)

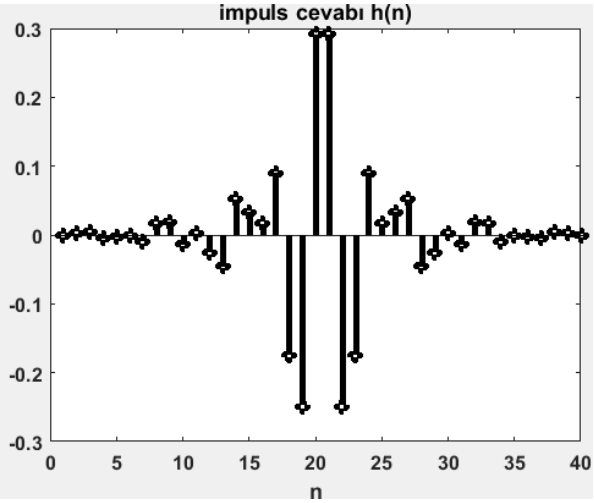
Hep beraber

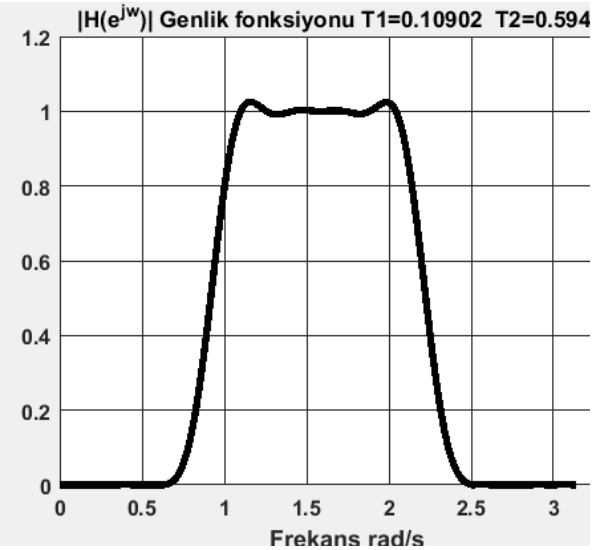
$H_r(k)$=[5 sıfır-T1,T2,7 bir,T2,T1,3 sıfır, π, 3 sıfır,T1,T2, 7 bir,T2,T1,4 sıfır]

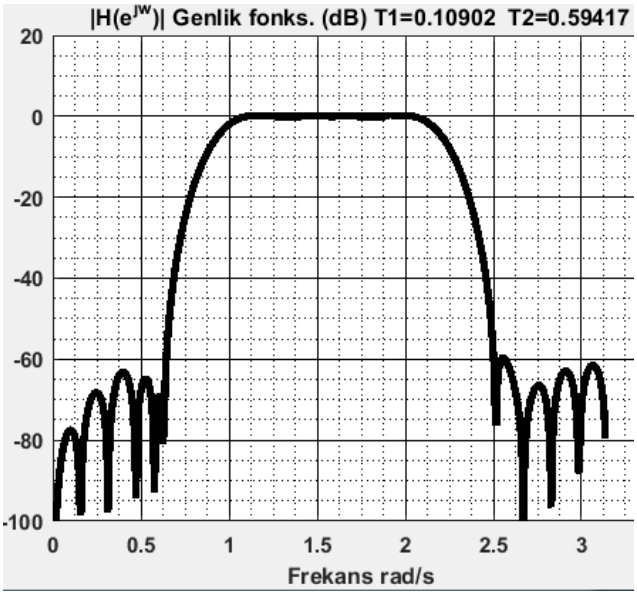
Hrk=[0 0 0 0 0 T1 T2 ones(1,7)T2 T1 zeros(1,9) T1 T2 ones(1,7) T2 T1 0 0 0 0];

`T1 = 0.109021, T2 = 0.59417456,` değerleri teorik olarak hesaplanmış ve sonuçlar aşağıda gösterilmiştir.







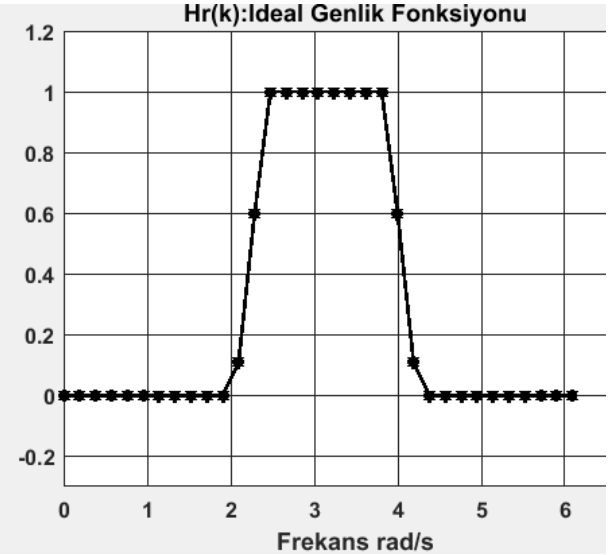
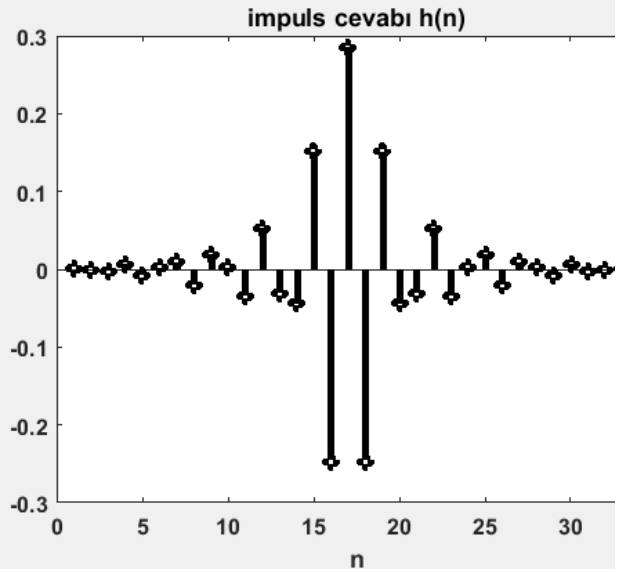
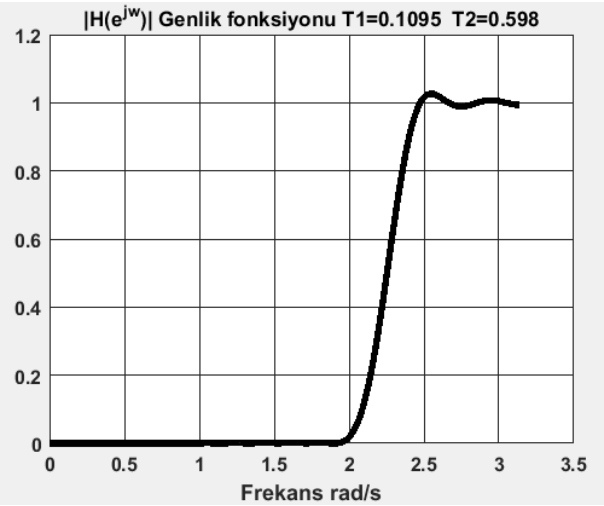
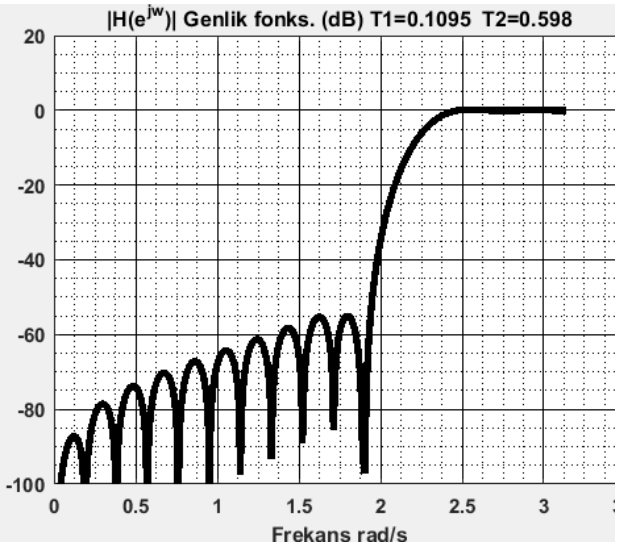


Örnek Problem 718)yüksek geçiren filtre tasarlayın. M=33.

$$\text{Stopband edge: } \omega_s = 0.6\pi \;\; A_s = 50 \text{ dB}$$

$$\text{Passband edge: } \omega_p = 0.8\pi \;\; R_p = 1 \text{ dB}$$

Çözüm: yüksek geçiren filtre Type 1 filtre olmak zorunda.

$$H_r(k) = [\underbrace{0,\ldots,0}_{11}, T_1, T_2, \underbrace{1,\ldots,1}_{8}, T_2, T_1, \underbrace{0,\ldots,0}_{10}]$$

$$\angle H(k) = \begin{cases} -\dfrac{33-1}{2}\dfrac{2\pi}{33}k = -\dfrac{32}{33}\pi k, & 0 \le k \le 16 \\ +\dfrac{32}{33}\pi(33-k), & 17 \le k \le 32 \end{cases}$$